姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设不全为零的 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求直线 $\dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-1}{b} = \dfrac{z-1}{c}$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面方程.

解答. 设点 $M_1(0,0,0)$, 方向 $\vec{s}_1 = (0,0,1)$, 则 z 轴为直线 L_1:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

直线 L_2

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$$

过点 $M_2(1,1,1)$,方向为$\vec{s}_2 = (a,b,c)$.
$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 的混合积为

$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = a - b.$$

..... (2 分)

(1). 当 $a = b$ 时, L_2 与 L_1 共面. 分以下三种情况讨论.

1). 当 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, 即 $c = 0$ 时, L_2 与 L_1 垂直, 此时所得的旋转面是 $z = 1$ 的平面.

当 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$, 即 $c \neq 0$ 时, L_2 与 L_1 平行或者相交于一点, 于是有以下两种情形.

2). 当 L_2 平行于 L_1 时, 所得的旋转曲面是一个圆柱面 $x^2 + y^2 = 2$.

3). 当 L_1 与 L_2 相交于一点时, 所得的旋转面为一个圆锥面, 顶点为它们的交点 $(0, 0, \frac{a-c}{a})$ 的锥面方程$x^2 + y^2 - \frac{2a^2}{c^2}(z - \frac{a-c}{a}) = 0$.

..... (8 分)

(2). 当 $a \neq b$ 时, 即 L_2 与 L_1 不共面时, 首先考虑 L_2 与 L_1 不垂直时的情形. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为L_2 上的任意一点, $M(x, y, z)$ 为过 M_0 的旋转曲面上的纬圆上的任意一点, 则有

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{s}_1 = 0, \\ \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M}\right|, \\ \frac{x_0-1}{a} = \frac{y_0-1}{b} = \frac{z_0-1}{c}. \end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases} z - z_0 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ x_0 = 1 + at, \\ y_0 = 1 + bt, \\ z_0 = 1 + ct, \end{cases}$$

其中 $t \in \mathbb{R}$ 为参数. 因 L_1 与 L_2 不垂直, 由 $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = c \neq 0$, 得到 $t = \frac{z_0-1}{c} = \frac{z-1}{c}$, 以及

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 =& x_0^2 + y_0^2 \\ =& \left[1 + \frac{a}{c}(z-1)\right]^2 + \left[1 + \frac{b}{c}(z-1)\right]^2 \\ =& Az^2 + Bz + C, \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{a^2 + b^2}{c^2},\ B = \frac{a(c-a) + b(c-b)}{c^2},\ C = \frac{(c-a)^2 + (c-b)^2}{c^2}.$$

经计算可得

$$AC - B^2 = \frac{(a-b)}{c^2} > 0.$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

注意到 $A>0$, 以及

$$\begin{aligned} x^2+y^2 =& Az^2+2Bz+C \\ =& A\left(z+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A} \end{aligned}$$

得到

$$\frac{A}{AC-B^2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{A^2}{AC-B^2}\left(z+\frac{B}{A}\right)=1.$$

它是旋转单叶双曲面.

..... (13 分)

当 L_1 与 L_2 为异面直线而且垂直时, $c=0$. 所得旋转曲面是一个挖去一个圆盘(半径为 L_1 与 L_2 之间的距离 $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的平面.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n\,(n \geq 2)$ 是单位开球，函数 u, v 在 $\overline{B}$ 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1-u^2-v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1-u^2-v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1\,(\forall\, x \in \overline{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1-w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

..... (6 分)

显然，$w(x) \in C^2(B) \bigcap C(\overline{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\overline{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1.

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0, -\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由（1）得到, 在 x_1 处，

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1-w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2) \leq 2(1-w)w.$$

..... (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由（1），$w(x_1) = 0$.

综合之，恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \overline{B}$.

..... (15 分)

□

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i}\right)^2 = 2021^2.$$

..... (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2019}x^2 + a_{2020}x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

..... (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019})\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}\right) \leq (40^2 + 2\cdot 40)(40^2 + 2\cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 ..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 P 为对称酉矩阵, 证明: 存在可逆复矩阵 Q 使得 $P=\overline{Q}Q^{-1}$.

解答. 设 P 为 n 阶矩阵. 因为 P 为酉矩阵, 自然为正规矩阵, 所以存在酉矩阵 U 使得 $U^{-1}PU=D$ 为对角阵.

..... (2 分)

设

$$D=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

并设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为复数满足 $\beta_i^2=\alpha_i, 1\le i\le n$, 令

$$E=\begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

由 Lagrange 插值公式知存在复系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(\alpha_i)=\beta_i, 1\le i\le n$, 从而

$$E=\begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & & \\ & f(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\alpha_n) \end{pmatrix}=f(D),$$

且

$$E^2=\begin{pmatrix} \beta_1^2 & & & \\ & \beta_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}=D.$$

..... (10 分)

现在 $D^T = D, P^T = P, U^T = \overline{U}^{-1}$, 所以

$$D = D^T = (U^{-1}PU)^T = U^T P^T (U^{-1})^T = \overline{U}^{-1} P \overline{U} = \overline{U}^{-1} U D U^{-1} \overline{U},$$

从而 $U^{-1}\overline{U}$ 与 D 可交换. 又 $E = f(D)$, 所以 E 也与 $U^{-1}\overline{U}$ 可交换, 即 $EU^{-1}\overline{U} = U^{-1}\overline{U}E$, 或写为

$$UEU^{-1} = \overline{U}E\overline{U}^{-1}.$$

..... (15 分)

由于 P 为酉矩阵, 即 $\overline{P}^T P = I$, 这里 I 为单位矩阵, 再由 U 也是酉矩阵得到

$$\overline{D}D = \overline{D}^T D = \overline{U^{-1}PU}^T U^{-1}PU = \overline{U}^T \overline{P}^T (\overline{U}^{-1})^T U^{-1} P U = \overline{U}^T U = I.$$

所以对任意 $1 \le i \le n$, $\overline{\alpha_i}\alpha_i = 1$, 即复数 α_i 的模为 1, 从而复数 β_i 的模也是 1, 故 $\overline{\beta_i} = \beta_i^{-1}$, 由此得到 $\overline{E} = E^{-1}$. 令 $Q = U\overline{E}U^{-1}$, 则显然 Q 可逆且有 $\overline{Q} = \overline{U}E\overline{U}^{-1} = UEU^{-1}$, 又 $Q^{-1} = U\overline{E}^{-1}U^{-1} = UEU^{-1}$, 所以

$$\overline{Q}Q^{-1} = (UEU^{-1})^2 = UE^2U^{-1} = UDU^{-1} = P.$$

..... (20 分)

□

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$, 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx.$

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^3 \, dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} \, dx.$

解答. (1) 证明: 对于 $s > 0$ 以及 $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-sx} \sin x \, dx &= \operatorname{Im} \int_a^b e^{-(s-i)x} \, dx = \operatorname{Im} \frac{e^{-(s-i)a} - e^{-(s-i)b}}{s-i} \\ &= \frac{se^{-sa} \sin a - se^{-sb} \sin b + e^{-sa} \cos a - e^{-sb} \cos b}{s^2+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

…… (2 分)

由 (1),

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}+1} \, dt$$

收敛.

…… (4 分)

任取 $A > \varepsilon > 0$, 由 Weierstrass 判别法, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt$ 关于 $x \in [\varepsilon, A]$ 一致收敛, 因此, 结合 (1),

$$\begin{aligned} & \Big| \int_\varepsilon^A dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \Big| \\ = & \Big| \int_0^{+\infty} dt \int_\varepsilon^A e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \Big| \\ \leqslant & \Big| \int_0^{+\infty} \Big(\Big| \int_A^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \Big| + \Big| \int_0^\varepsilon e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \Big| \Big) \, dt \\ \leqslant & \Big| \int_0^{+\infty} \frac{|t^\alpha e^{-t^\alpha A} \sin A + e^{-t^\alpha A} \cos A| + |-t^\alpha e^{-t^\alpha \varepsilon} \sin \varepsilon + 1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon|}{t^{2\alpha}+1} \, dt \\ \leqslant & \Big| \int_0^{+\infty} \Big(e^{-t^\alpha A} + |\sin \varepsilon| + |1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon| \Big) \frac{t^\alpha + 1}{t^{2\alpha}+1} \, dt. \end{aligned}$$

利用一致收敛性, 或控制收敛定理, 得到

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx.$$

…… (8 分)

(2) 对于 $\alpha > 1$, 以及 $x > 0$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x}\,dt = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-s}\,ds = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\big(\frac{1}{\alpha}\big).$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha+1}\,dt &= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 s\big(\frac{1}{s}-1\big)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{s^2}\,ds\\ &= \frac{1}{\alpha}B(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}) = \frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}.\end{aligned}$$

..... (11 分)

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha\,dx &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sin x\,dx\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,dt\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,dx\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+1}\,dt\\ &= \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\Gamma\big(\frac{1}{\alpha}\big)\sin\frac{\pi}{2\alpha}.\end{aligned}$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty}\sin x^3\,dx\cdot\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\Gamma\big(\frac{1}{3}\big)\sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\big(\frac{2}{3}\big)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.$$

..... (15 分)

注: 可以利用第二型曲线积分计算, 对于 $\alpha > 1$, 在以 0 为顶点的锥形区域

$$D := \big\{re^{i\theta}\big|r > 0, \theta \in (0,\beta)\big\}$$

内, 定义 $\mathrm{Ln\,z}$ 如下:

$$\mathrm{Ln}\,(\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln\mathrm{r} + \mathrm{i}\theta, \qquad \forall\,\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathrm{D},$$

其中 $\beta = \frac{\pi}{2\alpha}$. 则易见 $\mathrm{Ln\,z}$ 可以连续地把定义域延伸到 D 的边界. 又易见, 在 D 内成立 $\mathrm{Ln\,z}$ 在 D 内解析.

令 $z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, (z \in \overline{D})$, 则 e^{iz^α} 在 D 内解析在 $\overline{D}$ 上连续.
任取 $R > 0$, 考虑 $D_R := B_R(0) \cap D$, 则 $\int_{\partial D_R} e^{iz^\alpha}\, dz = 0$. 由此即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^R e^{ix^\alpha}\, dx = \int_0^R e^{ir^\alpha e^{i\alpha\beta}} e^{i\beta}\, dr - \int_0^\beta e^{iR^\alpha e^{i\alpha\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta \\
= \quad & e^{i\beta} \int_0^R e^{-r^\alpha \sin(\alpha\beta)} e^{ir^\alpha \cos(\alpha\beta)}\, dr - i \int_0^\beta Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta \\
= \quad & e^{\frac{\pi i}{2\alpha}} \int_0^R e^{-r^\alpha}\, dr - i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta.
\end{aligned}$$

易见有常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left| i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta \right| \\
\leqslant \quad & \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)}\, d\theta \right| \leqslant \left| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-CR^\alpha \theta}\, d\theta \right| \leqslant \frac{1}{CR^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

于是, 可得

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^\alpha}\, dx = e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-r^\alpha}\, dr = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}.$$

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 f, g 为 $\mathbb{R}$ 上的非负连续可微函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f'(x) \geqslant 6 + f(x) - f^2(x)$, $g'(x) \leqslant 6 + g(x) - g^2(x)$. 证明:

(1) $\forall \varepsilon \in (0,1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\xi \in (-\infty, x)$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) \geqslant 3$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在 $\eta \in (-\infty, x)$ 使得 $g(\eta) \leqslant 3$.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $g(x) \leqslant 3$.

解答. (1) 任取 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $f(t) \leqslant 3 - \varepsilon\,(\forall t \leqslant x)$. 因此,

$$f'(t) \geqslant 6 + f(t) - f^2(t) = (3 - f(t))(2 + f(t)) \geqslant 2\varepsilon, \qquad \forall t \leqslant x.$$

于是

$$f(x) - f(t) \geqslant 2\varepsilon(x - t), \qquad \forall t \leqslant x.$$

从而 $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$. 与 f 非负矛盾.
因此, 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$.

..... (5 分)

(2) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 由连续性, 我们只要证明对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 成立 $f(x) \geqslant 3 - \varepsilon$.

由 (1), 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$. 令 $h(t) = f(t) - (3 - \varepsilon)$, 我们有

$$h'(t) = f'(t) \geqslant (3 - f(t))(2 + f(t)) \geqslant -(2 + f(t))h(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

记 $F(t) = \int_0^t (2 + f(s))\, ds$, 则

$$\big(e^{F(t)} h(t)\big)' = e^{F(t)}\big(h'(t) + (2 + f(t))h(t)\big) \geqslant 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$e^{F(x)} h(x) \geqslant e^{F(\xi)} h(\xi) \geqslant 0.$$

因此, $h(x) \geqslant 0$. 即 $f(x) \geqslant 3 - \varepsilon$.

..... (10 分)

(3) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $g(t) > 3\,(\forall t < x)$. 因此,

$$g'(t) \leqslant 6 + g(t) - g^2(t) = -(g(t) - 3)^2 - 5(g(t) - 3) \leqslant -(g(t) - 3)^2, \qquad \forall t < x.$$

于是

$$\frac{g'(t)}{(g(t) - 3)^2} \leqslant -1, \qquad \forall t \leqslant x.$$

不等式两边在 $[t,x]$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{g(t)-3}-\frac{1}{g(x)-3}\leqslant t-x,\qquad \forall\, t<x.$$

进而

$$-\frac{1}{g(x)-3}\leqslant t-x,\qquad \forall\, t<x.$$

在上式令 $t\to-\infty$ 即得矛盾. 因此, 存在 $\eta\in(-\infty,x)$ 使得 $g(\eta)\leqslant 3$.

..... (17 分)

(4) 任取 $x\in\mathbb{R}$, 由 (3), 存在 $\eta\in(-\infty,x)$ 使得 $g(\eta)\leqslant 3$. 我们有

$$(g(t)-3)'\leqslant -(g(t)-3)(2+g(t)),\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

因此,

$$\big(e^{G(t)}(g(t)-3)\big)'=e^{G(t)}\big((g(t)-3)'+(2+g(t))(g(t)-3)\big)\leqslant 0,\qquad \forall\, t\in\mathbb{R},$$

其中 $G(t)=\int_0^t(2+g(s))\,ds$. 从而

$$e^{G(x)}(g(x)-3)\leqslant e^{G(\eta)}(g(\eta)-3)\leqslant 0.$$

因此, $g(x)\leqslant 3$. . $\square$

..... (20 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$, 求以点 $M_0(0,0,a)(a\in\mathbb{R},\ |a|>1)$ 为顶点的与 S 相切的锥面方程.

解答. 解法一:

设 L 为过顶点 $M_0(0,0,a)$, 方向为 $\vec{s}=(l,m,n)$, 与 S 相切的锥面上的任意一条母线, 则对于 L 上任意一点$M(x,y,z)$, L 的方程可以表示为

$$\frac{x-0}{l}=\frac{y-0}{m}=\frac{z-a}{n},$$

其中 $l,m,n\in\mathbb{R}$ 不全为零. 设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=lt, \\ y=mt, \\ z=a+nt, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 为参数.

将直线的参数方程 (1) 代入 S 中可得

$$(l^2+m^2+n^2)t^2+2ant+a^2-1=0.$$

由直线 L 与球面 S 相切的条件可知

$$(2an)^2-4(l^2+m^2+n^2)(a^2-1)=0,$$

亦即

$$(l^2+m^2)a^2=(l^2+m^2+n^2). \tag{2}$$

..... (12 分)

由 (1) 和 (2) 消去参数 t 可得锥面方程

$$(a^2-1)(x^2+y^2)-(z-a)^2=0,$$

其中 $|a|>1$.

..... (15 分)

解法二：

设 $O(0,0,0)$ 为球心坐标, $M(x,y,z)$ 为切锥面与球面的切点, 半顶角为 $\alpha=\angle(\overrightarrow{M_0O},\overrightarrow{M_0M})$, 则有 $\sin\alpha=\frac{1}{|a|}$.

..... (7 分)

注意到

$$\cos^2\alpha=\frac{|\overrightarrow{M_0O}\cdot\overrightarrow{M_0M}|^2}{|\overrightarrow{M_0O}|^2|\overrightarrow{M_0M}|^2},\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

得到

$$\frac{(z-a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2}=\frac{a^2-1}{a^2},$$

即

$$(a^2-1)(x^2+y^2)-(z-a)^2=0,$$

其中 $|a>1|$.

..... (15 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n\,(n \geq 2)$ 是单位开球，函数 u, v 在 $\overline{B}$ 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1-u^2-v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1-u^2-v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1\,(\forall\, x \in \overline{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1-w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

..... (6 分)

显然，$w(x) \in C^2(B) \bigcap C(\overline{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\overline{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1.

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0, -\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由（1）得到, 在 x_1 处，

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1-w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2) \leq 2(1-w)w.$$

..... (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由（1），$w(x_1) = 0$.

综合之，恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \overline{B}$.

..... (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i}\right)^2 = 2021^2.$$

..... (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2019}x^2 + a_{2020}x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

..... (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019})\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}\right) \leq (40^2 + 2\cdot 40)(40^2 + 2\cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 ..... (15 分)

□

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $R=\{0,1,-1\}$, S 为 R 上的 3 阶行列式全体, 即 $S=\{\det(a_{ij})_{3\times 3}|a_{ij}\in R\}$. 证明：$S=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

解答. 首先，通过直接检验可知

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3,\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

..... (5 分)

其次，由于交换两行，行列式值改变符号，因此有 $\Gamma\supseteq\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

..... (10 分)

第三，我们证明: $\forall(a_{ij})_{3\times 3}, a_{ij}\in R$,总有$|\det(a_{ij})|\leqslant 4$.
事实上，由对角线法则可知

$$\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

记

$$b_1=a_{11}a_{22}a_{33}, b_2=a_{12}a_{23}a_{31}, b_3=a_{13}a_{32}a_{21},$$

$$b_4=-a_{13}a_{22}a_{31}, b_5=-a_{12}a_{21}a_{33}, b_6=-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

直接观察可知：每个a_{ij} 在单项 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 中共出现两次，且

$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-a_{11}^2a_{12}^2a_{13}^2a_{21}^2a_{22}^2a_{23}^2a_{31}^2a_{32}^2a_{33}^2.$$

因此立即可得：若有某个 $a_{ij}=0$, 则 $b_1,\ldots,b_6$ 中至少有两个为 0，从而 $|\det(a_{ij})|\leqslant 4$. 倘若每个$a_{ij}$ 都不等于 0, 则由 $a_{ij}=\pm 1$ 得 $b_1,\ldots,b_6$ 之积 $=-1$，从而至少有一个 b_i 为 -1，同时也至少有一个 b_j 为 1，否则与 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-1$ 矛盾. 结果 b_i 与 b_j 互相抵消，仍有 $|\det(a_{ij})|\leqslant 4$.
至此，综上所得，$\Gamma=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$\Gamma$ 共由 9 个元素所组成.

..... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设函数 f 在 $[-1,1]$ 内有定义，在 $x=0$ 的某邻域内连续可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 发散.

证明. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$, 知 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$。又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续可导，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

..... (3 分)

于是 $0<a=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. 由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，存在正数 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in[0,\delta]$, 有 $f'(x)>0$ 因此, 在 $[0,\delta]$ 上 $f(x)$ 单调增加.

..... (8 分)

于是存在正整数 $N>\frac{1}{\delta}$，当 $n>N$ 时, $f\big(\dfrac{1}{n}\big)>0$ 且 $f\big(\dfrac{1}{n}\big)>f\big(\dfrac{1}{n+1}\big)$. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$，知 $\lim\limits_{N\to\infty} f\big(\dfrac{1}{n}\big)=0$, 且 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 为交错级数，由莱布尼兹判别法，级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛.

..... (12 分)

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\big(\frac{1}{n}\big)}{1/n}=a>0$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 发散.

..... (15 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $f(x)=\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数 f 在 $(-\infty,0)$ 内为严格凸的，并且对任意 $\xi\in(-\infty,0)$, 存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 使得

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

(称 (a,b) 内的函数 S 为严格凸的, 如果对任何 $\alpha\in(0,1)$, 以及 $x,y\in(a,b)$, $x\neq y$ 成立 $S(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha S(x)+(1-\alpha)S(y)$.)

证明. 记 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. 我们有

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)},\quad f''(x)=\frac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)}.$$

又因为

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n},\quad g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}.$$

..... (4 分)

于是, 由 Hölder 不等式,

$$g''(x)g(x)-(g'(x))^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}\right)^2>0,$$

从而函数 $f(x)$ 为严格凸的.

..... (10 分)

记 $h(x)=f(x)-(f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi))$. 则 $h''(x)>0$ 及 $h'(\xi)=h(\xi)=0$. 于是函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\xi)$ 上严格递减, 在 $(\xi,0)$ 上严格增加. 任取 $a\in(-\infty,\xi),b\in(\xi,0)$. 则 $h(a)>0,h(b)>0$. 取 $c\in(0,\min\{h(a),h(b)\})$, 则存在 $x_1\in(a,\xi),x_2\in(\xi,b)$ 使得 $h(x_1)=h(x_2)=c$.

..... (16 分)

于是

$$\begin{aligned}0=h(x_2)-h_2(x_1)&=f(x_2)-(f(\xi)+f'(\xi)(x_2-\xi))-f(x_1)+f(\xi)+f'(\xi)(x_1-\xi)\\&=f(x_2)-f(x_1)-f'(\xi)(x_2-x_1)\end{aligned}$$

于是

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

..... (20 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷

(数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设 $N(0,0,1)$ 是球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的北极点. $A(a_1,a_2,0), B(b_1,b_2,0), C(c_1,c_2,0)$ 为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A,B,C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1, B_1 与 C_1.

(1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.

(2) 求点 A_1, B_1 与 C_1 的坐标.

(3) 给定点 $A(1,-1,0), B(-1,1,0), C(1,1,0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

解.

(1) 过 N, A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1}=\frac{y}{a_2}=\frac{z-1}{-1}.$$

..... (3 分)

(2) 由此可得直线的参数方程

$$x=a_1t,\quad y=a_2t,\quad z=1-t,$$

代入球面方程可得

$$(a_1t)^2+(a_2t)^2+(1-t)^2=1.$$

由此解得

$$t=\frac{2}{a_1^2+a_2^2+1}\quad 或\quad t=0.$$

从而得 A_1 的坐标为

$$\Big(\frac{2a_1}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{2a_2}{a_1^2+a_2^2+1},\frac{a_1^2+a_2^2-1}{a_1^2+a_2^2+1}\Big).$$

同理可得，A_2 的坐标为

$$\Big(\frac{2b_1}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{2b_2}{b_1^2+b_2^2+1},\frac{b_1^2+b_2^2-1}{b_1^2+b_2^2+1}\Big).$$

以及 A_3 的坐标为

$$\Big(\frac{2c_1}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{2c_2}{c_1^2+c_2^2+1},\frac{c_1^2+c_2^2-1}{c_1^2+c_2^2+1}\Big).$$

.....(9 分)

（3）当 $A(1,-1,0)$, $B(-1,1,0)$ 以及 $C(1,1,0)$ 给定时, 经计算可得

$$A_1=\Big(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big),\qquad B_1=\Big(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big),\qquad C_1=\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big).$$

所以, 利用向量的混合积可以把四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积表示为

$$V=\frac{1}{6}\big|\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)\big|.$$

混合积 $\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)$ 表示成矩阵的行列式

$$\big(\overrightarrow{NA_1},\overrightarrow{NB_1},\overrightarrow{NC_1}\big)=\det\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{32}{27}.$$

于是得到

$$V=\frac{1}{6}\times\frac{32}{27}=\frac{16}{81}.$$

.....(15 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}$.

解. 我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020}+\left(\frac{2}{n}\right)^{2020}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^{2020}\right)\\
=\ &\int_0^1 x^{2020}\,dx=\frac{1}{2021}.
\end{aligned}$$

或用 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2021}}\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2020}}{n^{2021}-(n-1)^{2021}}=\frac{1}{2021}.$$

因此, $\ln\dfrac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界.

.....(8 分)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020})}\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2021\ln n+\ln\frac{1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}}{n^{2021}}}\\
=\ &\frac{1}{2021}.
\end{aligned}$$

.....(15 分)

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx\,(x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

解. A, B 一定不相似.

.....(2 分)

证明如下.

令 $C = AB^{-1}$. 由于 A, B 均为正交矩阵, 故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵, 故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D, 使得 $T^{-1}CT = D$, 其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

.....(7 分)

齐次线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数为 3, 则 $\operatorname{rank}(A - B) = 2017$. 进而

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(D - I) &= \operatorname{rank}\left(T^{-1}(C - I)T\right) = \operatorname{rank}(C - I)\\ &= \operatorname{rank}\left((A - B)B^{-1}\right) = \operatorname{rank}(A - B) = 2017.\end{aligned}$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1. 即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1, 而非实数特征值共轭成对出现, 共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值 (计重数), 故 C 有特征值 -1, 且重数为奇数.

.....(12 分)

C 的行列式是其所有特征值 (计重数) 之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现, 它们的乘积为正数. 故 $\det C < 0$. 特别地, $\det(AB^{-1}) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$. 从而 A, B 不相似.

.....(15 分)

得分	
评阅人	

四、（本题 20 分）称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k, 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

解. 显然 $f(x)=x^{2020}$ 满足题意.

.....(5 分)

以下证明这是唯一解. 设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2020}$. 对每个 $k\,(1\leqslant k\leqslant 2020)$, 由题设条件可设 $f(x)=(x-x_k)g_k(x)h_k(x)$, 其中 $g_k(x),h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式, 第二项系数均为 a_k. 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1},y_{k,2},\cdots,y_{k,m_k}$, $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1},z_{k,2},\cdots,z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 $x_j\,(j\neq k)$. 由韦达定理,

$$a_k=(-1)^{m_k-1}\big(y_{k,1}+y_{k,2}+\cdots+y_{k,m_k}\big)=(-1)^{n_k-1}\big(z_{k,1}+z_{k,2}+\cdots+z_{k,n_k}\big).$$

.....(12 分)

对每个 k, 将上式改写为

$$\sum_{j\neq k}\varepsilon_{kj}x_j=0,$$

其中 $\varepsilon_{kj}=1$ 或 -1.

这样, 我们得到了关于 $x_1,x_2,\cdots,x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵, 主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1. 令 B 为 2020 阶方阵, 其主对角线上元素为 0, 主对角线外元素为 1, 则容易计算出 B 的行列式为 $\det B=-2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同, 故 $\det A\neq 0$.

.....(18 分)

从而上述齐次线性方程组只有零解, 即 $x_1=x_2=\cdots=x_{2020}=0$. 这便证明了 $f(x)=x^{2020}$.

.....(20 分)

注: 上面证明 $\det A\neq 0$ 也可以如下进行:

显然, $\det A \equiv \det B \pmod 2$. 由于 $\det B = -2019 \equiv 1 \pmod 2$. 所以 $\det A \equiv 1 \pmod 2$. 故 $\det A \neq 0$.

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题 15 分）设 φ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2}=\psi\Big(\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\varphi(x_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\Big),\qquad n\geqslant 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明. 我们断言 $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下. 记 $y_n=\varphi(x_n)$, 则

$$y_{n+2}=(1-\frac{1}{\sqrt{n}})y_n+\frac{1}{\sqrt{n}}y_{n+1},\qquad n\geqslant 2.$$

令

$$a_n=\min\{y_n,y_{n-1}\},\quad b_n=\max\{y_n,y_{n-1}\}\qquad n\geqslant 3.$$

则

$$a_n\leqslant y_{n+1}\leqslant b_n,\qquad n\geqslant 3.$$

进而

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,\qquad n\geqslant 3.$$

所以 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均单调有界, 从而收敛.

.....(5 分)

特别, $\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2}-y_{n+1}=-\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\big(y_{n+1}-y_n\big),\qquad n\geqslant 2.$$

因此

$$\big|y_{n+2}-y_{n+1}\big|\leqslant|y_3-y_2|\prod_{k=2}^{n}\big(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\big),\qquad n\geqslant 2.$$

由 $\prod\limits_{k=2}^{\infty}\big(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\big)$ 发散到零, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\big(y_{n+1}-y_n\big)=0$.

.....(10 分)

所以

$$b_n-a_n=|y_n-y_{n-1}|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

这样, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限相等, 从而 $\{y_n\}$ 收敛.

最后, 由 ψ 的连续性得到 $\{x_n\}$ 收敛.

.....(15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题 20 分）对于有界区间 $[a,b]$ 的划分 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=b$, 其范数定义为 $\|P\|=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(x_{k+1}-x_k)$. 现设 $[a,b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M>0$ 使得对任何 $x,y\in[a,b]$, 成立 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$. 定义 $s(f;P)\equiv\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}$. 若 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+}s(f;P)$ 存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a,b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}s(f;P_n)$ 存在. (2) 曲线 $y=f(x)$ 可求长.

证明. 法 I. 我们有

$$0\leqslant s(f;P)\leqslant\sum_{k=0}^{n}\sqrt{M^2+1}|x_{k+1}-x_k|=(b-a)\sqrt{M^2+1}.$$

因此, $s(f;P)$ 有界.

.....(3 分)

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f;P_n)\leqslant s(f;P_{n+1}),\qquad \forall\, n\geqslant 1.$$

因此, $\{s(f;P_n)\}$ 单调增加, 结合有界性知其收敛. 设极限为 L.

.....(8 分)

一般地, 对于划分 P,Q, 用 $P\bigoplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f;P\bigoplus Q)\geqslant s(f;P).$$

(2) 对于任何 $\varepsilon>0$, 有 $m\geqslant 1$ 使得

$$s(f;P_m)\geqslant L-\varepsilon.$$

对于划分 P, 用 $P\bigoplus P_m$ 表示由 P 和 P_m 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f;P\bigoplus P_m)\geqslant s(f;P_m)\geqslant L-\varepsilon.$$

在 $s(f;P\bigoplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f;P)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项, 总数不超过 2^{m+1} 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P\bigoplus P_m\|\leqslant\|P\|$. 因此, 这些项的

和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f;P) \geqslant s(f;P\bigoplus P_m) - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\| \geqslant L-\varepsilon-2^{m+1}\sqrt{M^2+1}.$$

这样

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L-\varepsilon.$$

进而

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L.$$

.....(14 分)

类似地, 记 $K = \varlimsup_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有划分 Q 使得

$$s(f;Q) \geqslant K-\varepsilon.$$

则

$$s(f;Q\bigoplus P_m) \geqslant s(f;Q) \geqslant K-\varepsilon.$$

在 $s(f;Q\bigoplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f;P_m)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项, 总数不超过 $2N$ 项, 其中 N 是划分 Q 的分点数. 因此, 这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|$. 于是

$$s(f;P_m) \geqslant s(f;Q\bigoplus P_m) - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\| \geqslant K-\varepsilon-2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|.$$

这样

$$L = \lim_{m\to\infty} s(f;P_m) \geqslant K-\varepsilon.$$

进而 $L \geqslant K$. 结合 $K \geqslant \varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L$ 得到

$$\lim_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) = L.$$

即 $y=f(x)$ 可求长.

.....(20 分)

法 II. 事实上, 注意到 (1) 是 (2) 的推论, 我们只需直接证明 (2). 具体证明如下.

我们有

$$0 \leqslant s(f;P) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{M^2+1}|x_{k+1}-x_k| = (b-a)\sqrt{M^2+1}.$$

因此, $s(f;P)$ 有界.

.....(3 分)

对于划分 P, Q, 用 $P \bigoplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f;P \bigoplus Q) \geqslant s(f;P).$$

.....(8 分)

考虑划分列 $\{Q_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \|Q_k\| = 0$, 且

$$\lim_{k\to\infty} s(f;Q_k) = L \equiv \varlimsup_{\|P\|\to 0} s(f;P).$$

.....(10 分)

对于每个 $k \geqslant 1$, 设 N_k 为划分 Q_k 的分点数.

$$s(f;P \bigoplus P_m) \geqslant s(f;P_m) \geqslant L - \varepsilon.$$

在 $s(f;P \bigoplus Q_k)$ 的和式中, 与 $s(f;P)$ 的和式中不同的项是涉及 Q_k 的分点的项, 总数不超过 $2N_k$ 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \bigoplus Q_k\| \leqslant \|P\|$. 因此, 这些项的和不超过 $2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f;P) \geqslant s(f;P \bigoplus Q_k) - 2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\| \geqslant s(f;Q_k) - 2N_k\sqrt{M^2+1}\|P\|.$$

这样

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant s(f;Q_k), \qquad \forall\, k \geqslant 1.$$

进而

$$\varliminf_{\|P\|\to 0^+} s(f;P) \geqslant L = \varlimsup_{\|P\|\to 0^+} s(f;P).$$

所以 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} s(f;P)$ 存在. 即 $y = f(x)$ 可求长. 自然也有 $\lim\limits_{n\to\infty} s(f;P_n)$ 存在.

.....(20 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷答案
(数学类B卷, 2020年11月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分)已知椭球面

$$\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b,$$

的外切柱面Σ_ε ($\varepsilon = 1$ 或 -1) 平行于已知直线

$$l_\varepsilon : \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}.$$

试求与Σ_ε交于一个圆周的平面的法方向. 注：本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

解： 设l是柱面的任意一条直母线，则由假设，l与已知椭球面Σ_0相切于一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$. 因为l平行于已知直线l_ε, 所以，l的标准方程和参数方程分别是

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-z_1}{c},$$
$$x = x_1, \quad y = y_1 + \varepsilon t\sqrt{a^2-b^2}, \quad z = z_1 + ct.$$

把l的参数方程代入曲面Σ_0的方程并化简得

$$t^2\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}+1\right) + 2t\left(\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1 + \frac{1}{c}z_1\right) + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad (1)$$

其中首项系数$\frac{a^2-b^2}{a^2} + 1 > 0$. （5分）

因为点M_1在Σ_0上，所以

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0.$$

又因为l与Σ_0在M_1点相切，所以$t=0$是二次方程(1)的重根。因此，

$$\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}y_1+\frac{1}{c}z_1=0,\ \text{即}\ \varepsilon c\sqrt{a^2-b^2}y_1+b^2z_1=0.$$

此式与

$$\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c}\ \text{即}\ \varepsilon cy_1-\sqrt{a^2-b^2}z_1=\varepsilon cy-\sqrt{a^2-b^2}z$$

联立解出

$$y_1=\frac{b^2}{ca^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z),\quad z_1=-\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z).$$

再把$x_1=x$和上面的两式代入Σ_0的方程，得到外切柱面Σ_ε的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2}{a^4c^2}+\frac{(a^2-b^2)(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2}{a^4c^2}=1.$$

（10分）

如果令$z=0$, 上式化为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{a^4}+\frac{(a^2-b^2)y^2}{a^4}=1,\ \text{即}\ x^2+y^2=a^2.$$

所以柱面Σ_ε与xoy坐标面相交于圆周

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}.$$

由于与二次柱面Σ_ε的交线为圆周的所有平面都是平行的，故知所求的法方向唯一且为xoy平面的法方向，方向数为$0,0,1$. （15分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明：$1 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$.

证： 由 Schwarz不等式，

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

（5分）

又由于 $(f(x)-1)(f(x)-3) \leqslant 0$, 故有$\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)} \leqslant 0$, 即$\int_0^1 (f(x)+\frac{3}{f(x)})dx \leqslant 4$.（10分）

由$4ab \leqslant (a+b)^2$ 知

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx \leqslant \frac{(\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}dx)^2}{4} \leqslant 4$$

于是 $1 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$.

（15分）

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geqslant 1$. 证明：$g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

证明：取A 的 Jordan 分解：$A = P\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$,

其中$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 Jordan 块. 结果，

$$(*) \qquad g(A) = P\begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_s) \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g(\lambda_s) \end{pmatrix}P^{-1}$$

（8分）

$\Leftarrow$). $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素,于是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 注意到$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 为A 的所有互不相同的特征根. 故有 $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_s)$ 均不为0. 结果,

$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot \cdots \cdot g(\lambda_s) \neq 0,$$

$g(A)$可逆，得证. （13分）

$\Rightarrow$). $g(A)$可逆,从而 $|g(A)| \neq 0$. 由 $|g(A)| = g(\lambda_1) \cdot \cdots \cdot g(\lambda_s)$ 知： $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_s)$ 均不为0，故 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 当然 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素，否则导致$p(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根，矛盾. （15分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换. $\mathbb{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价：

(1) $\sigma = k\mathbb{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2)存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1, \ldots, v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证： (1) $\Rightarrow$ (2). 取$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, v_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = e_1 + \cdots + e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. 则易知, $v_1, \ldots, v_{n+1}$ 均是σ 的特征向量. 进一步，该组向量中任何n 个向量必线性无关. 事实上, 不妨设这n个向量为：$v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$. 于是

$a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_{n+1}v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow$

$(a_1+a_{n+1})e_1 + \cdots + (a_{i-1}+a_{n+1})e_{i-1} + a_{n+1}e_i + (a_{i+1}+a_{n+1})e_{i+1} + \cdots + (a_n+a_{n+1})e_n = 0.$

结果，$a_{n+1} = 0$, 进而 $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 0$. 如所需。 （5分）

(2) $\Rightarrow$ (1). 记$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ 分别为相应于$v_1, \ldots, v_{n+1}$ 的 σ 的特征值，其和为s, 即$s = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}$. 由条件知 $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$ 线性无关, 因此它可充当 $\mathbb{C}^n$ 的基. σ 在此组基下的表示阵为A:

$$\sigma(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}) = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1})A$$

结果 $trA = s - \lambda_i$. （10分）

又取$v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1}$, σ 在此组基下的表示阵为B:

$$\sigma(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1}) = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{n+1})B$$

结果 $trB = s - \lambda_j$. 注意到A 与B 相似，因为他们是同一线性变换在不同基下的表示阵。故$s - \lambda_i = s - \lambda_j, \lambda_i = \lambda_j$. 即

$\sigma = k\mathbb{1}, k = \lambda_1$. 证毕. （20分）

得分	
评阅人	

五、（本题15分）计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}dx$, 这里 (x)表示 x的小数部分(例如：当n为正整数且$x\in[n,n+1)$时，$(x)=x-n$).

证： 对于任意正整数 $\ell>2$, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}dx &= \sum_{n=1}^{\ell-1}\int_n^{n+1}\frac{x-n}{x^3}=\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\int_n^{n+1}x^{-2}dx-n\int_n^{n+1}x^{-3}dx\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{2n+1}{n(n+1)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{2}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\ell-1}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

（10分）

对于$y\in[\ell,\ell+1)$, 我们有

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell}\frac{1}{n^2}=\int_1^{\ell}\frac{(x)}{x^3}dx\leqslant\int_1^{y}\frac{(x)}{x^3}dx\leqslant\int_1^{\ell+1}\frac{(x)}{x^3}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\ell+1}\frac{1}{n^2}$$

于是得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1-\frac{\pi^2}{12}.$$

（15分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设函数$f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，满足对任意$x\in[0,1]$

$$\int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明：$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{10}$.

证明一： 注意到

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(t)dt = \int_0^1 dt\int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

于是，我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13 分

因为

$$0 \leqslant \int_0^1 (f(t)-(\sqrt{t}-t))^2dt = \int_0^1 f^2(t)dt - 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 18 分

所以

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant 2\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt - \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2dt \geqslant \frac{2}{15}-\frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20 分

证明二： 注意到

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(t)dt = \int_0^1 dt\int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8 分

于是，我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(t)dt \geqslant \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13 分

因为对任意$\beta \in (0,+\infty)$

$$0 \leqslant \int_0^1 (\beta f(t) - (\sqrt{t}-t))^2 dt = \int_0^1 \beta^2 f^2(t)dt - 2\beta \int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(t)dt &\geqslant \frac{2}{\beta}\int_0^1 (\sqrt{t}-t)f(t)dt - \frac{1}{\beta^2}\int_0^1 (\sqrt{t}-t)^2 dt \geqslant \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} \\ &= \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right).\end{aligned}$$

……17 分

容易得到当$\beta \in [1/3, 1]$时，有

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant \frac{1}{30}\left(4\cdot\frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{10}.$$

特别地，当$\beta = 1/2$时

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geqslant \frac{1}{30}\left(4\cdot 2 - 2^2\right) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

……20 分

证明三：因为对任意$0 < \beta < 1$，任意正整数n, 我们有

$$\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t)dt \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}\right).$$

……5 分

于是

$$\int_0^{\beta} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t)dt \geqslant \frac{\beta^2}{2}.$$

……8 分

从而我们有

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{\beta\to 1^-}\int_0^{\beta} f(t)dt \geqslant \lim_{\beta\to 1^-}\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

……13 分

最后，由柯西-希瓦尔茨不等式可得

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \left(\int_0^1 1^2 dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 18 分

于是,

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20 分

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考场号:_____ 座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷

(数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 空间中有两个圆球面B_1和B_2, B_2包含在B_1所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为D. 设B是含在D中的一个圆球，它与球面B_1和B_2均相切. 问：

(i) （4分）B的球心轨迹构成的曲面S是何种曲面；

(ii) （2分）B_1的球心和B_2的球心是曲面S的何种点.

证明你的论断（9分）.

答：B的球心轨迹构成的曲面S为旋转椭球面（2分+2分=4分）；B_1和B_2的球心为S的两个焦点（2分）.

证明: 设B_1的球心为O_1, 半径为R_1, B_2的球心为O_2, 半径为R_2. 设B是含在D中的一个球，球心在P点，半径为r, 它与球B_1和B_2均相切. 因为B与B_1内切，所以$PO_1 = R_1 - r$. 因为B与B_2外切，所以$PO_2 = R_2 + r$. 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数. （4分）

设ℓ是过球心O_1和O_2的直线. 因为B_1和B_2在以ℓ为不动轴的空间旋转下不变, 故区域D也在以ℓ为不动轴的空间旋转下不变. B在以ℓ为不动轴的空间旋转下保持与B_1和B_2均相切，它的球心P在以ℓ为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线ℓ的平面Σ上，由于$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$总是常数, B的球心轨迹P在平面Σ上

是一个椭圆. 故B的球心轨迹构成的曲面S为旋转椭球，旋转轴为过O_1和O_2的直线，并且两球心O_1和O_2为旋转椭球的两个焦点. （9分）

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0) = 0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha+1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

证明 (反证法) 若结论不对, 则对一切 $x \in [0,1)$ 有

$$xf''(x) + (\alpha+1)f'(x) \leqslant \alpha f(x).$$

这说明函数 $xf'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u)\,du$ 的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$xf'(x) + \alpha f(x) \leqslant \alpha \int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1]. \qquad (\ldots\ldots\ 5分)$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leqslant \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1].$$

将上式在 $[0,x]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^t f(u)\,du \right) dt \\ &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^x f(u)\,du \right) dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u)\,du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leqslant \int_0^x f(u)\,du. \qquad (\ldots\ldots\ 10分)$$

记, $g(x) = \int_0^x f(u)\,du$. 则从上式可得 $g'(x) \leqslant g(x)$. 因此

$$(e^{-x} g(x))' \leqslant 0.$$

这说明 $e^{-x}g(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减. 注意到 $g(0) = 0$, 可得 $g(x) \leqslant 0$. 但从 $f(x)$ 非负可知 $g(x) \geqslant 0$. 故, $g(x) \equiv 0$. 从而 $f(x) \equiv 0$. 这与 $f(x)$ 不恒为零矛盾! (..... 15分)

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设A为n阶复方阵, $p(x)$为$I-\overline{A}A$的特征多项式,其中$\overline{A}$表A的共轭矩阵. 证明：$p(x)$必为实系数多项式.

证明：记

$$p(t)=det(tI-(I-A\bar{A}))=det((t-1)I+A\bar{A})$$

为$I-A\bar{A}$的特征多项式. 对任何实数t，有

$$(*)\qquad \overline{p(t)}=\overline{det((t-1)I+A\bar{A})}=det((t-1)I+\bar{A}A).$$

（5分）

对任何两个方阵A和B，有$det(sI+AB)=det(sI+BA)$, 证明如下：取可逆矩阵序列B_n使得$B_n\to B$（例如，对充分大的n取$B_n=B+\frac{1}{n}I$），则

$$det(sI+AB_n)=det(sB_n^{-1}+A)detB_n=detB_ndet(sB_n^{-1}+A)=det(sI+B_nA).$$

令$n\to\infty$, 得到公式$det(sI+AB)=det(sI+BA)$. 用$B=\bar{A}$代入公式，则有

$$\overline{p(t)}=det((t-1)I+\bar{A}A)=det((t-1)I+A\bar{A})=p(t)$$

对所有的实数t成立，故$p(t)$的系数都是实数. （15分）

注：也可通过利用分块矩阵初等变换求$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}$的行列式来证明公式$det(sI-AB)=det(sI-BA)$.具体地：

$$\forall s\neq 0,\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI-AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-BA/s & B \\ 0 & sI \end{pmatrix}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得$det(sI-AB)=det(sI-BA)$对一切非零的实数均成立.从而多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)\equiv 0$，因为多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)$至多是n次多项式. 获证.

得分	
评阅人	

四、（本题20分）已知f_1为实n元正定二次型. 令 $V=\{f \mid f$为实n元二次型，满足：对任何实数k有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型$\}$,

这里恒号二次型为0二次型，正定二次型及负定二次型的总称. 证明：V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并求这个向量空间的维数.

证法1： 设$f\in V, f$与 f_1 所对应的二次型矩阵分别为 A 和B. 由B 正定可推得

$\exists P$ 可逆，使得 $B=PP^T, A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^T.$ （10分）

由条件：对任何实数k有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.

事实上，若$\lambda_1\neq\lambda_2$. 则由式子

$$kf+f_1=(z_1,\ldots,z_n)P\begin{pmatrix}k\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n+1\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

知，总可取某实数 q, 使得$(q\lambda_1+1)(q\lambda_2+1)<0$. 从而可取两点：$(z_1,\ldots,z_n)P=(0,1,0,\ldots,0)$ 及 $(z_1,\ldots,z_n)P=(1,0,0,\ldots,0)$， $qf+f_1$在该两点取值异号，矛盾.

到此，我们实际上得到$V=\{kf_1|k\in\mathbb{R}\}$.

直接可知， V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. 证毕。 （20分）

证法2： 首先，$V\neq\emptyset$, 因为$0\in V$, 且对任何实数k有$kf_1\in V$. （2分）

其次，对任意非零$f\in V$, 若存在$k\in\mathbf{R}$, 使得$kf+f_1\equiv 0$, 则由f_1的正定性，可知$k\neq 0$，从而$f=-\frac{1}{k}f_1$; 若对任意的$k\in\mathbf{R}$, $kf+f_1\not\equiv 0$, 则由条件知，$kf+f_1$要么为正定二次型，要么为负定二次型. 断言：f和f_1必线性相关.

用反证法. 若f和f_1线性无关，则由f_1正定知，存在点P_1使得$f_1(P_1)>0$. 此时考察二次型 $g=f_1(P_1)f-f(P_1)f_1$, 由f和f_1线性无关知$g\not\equiv 0$ (因为$\{f_1(P_1),-f(P_1)\}$是一组不全为零的数), 故存在P_2使得

$$(*)\qquad 0\neq g(P_2)=f_1(P_1)f(P_2)-f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

(i) $P_2\neq(0,\cdots,0), f_1(P_2)>0$;

(ii) $f(P_2), f(P_1)$不同时为零.

先考虑$f(P_1) \neq 0$的情形，由(*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2) + f_1(P_2) = \frac{g(P_2)}{-f(P_1)} \neq 0.$$

令 $k = \frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$, 由$kf + f_1$ 恒号可知：当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} > 0$时，$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) > 0$, 明显上述不等式左边为零，矛盾.

当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} < 0$时, 得$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) < 0$,不等式左边为零，矛盾.

接下来考虑$f(P_2) \neq 0$的情形. 同样由(*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1) + f_1(P_1) = \frac{g(P_2)}{-f(P_2)} \neq 0.$$

令 $k = -\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$, 类似地，由$kf + f_1$ 恒号可得矛盾.断言获证. （15分）

现在， f与f_1 线性相关，故存在一组不全为0 得数$\lambda_1\mu$, 使得 $\lambda_1 f_1 + \mu f = 0$.

若$\lambda_1 = 0$, 则 $\mu \neq 0$, 因此有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$. 若$\lambda_1 \neq 0$, 则由$\lambda_1 f_1 \neq 0$ 知 $\mu \neq 0$, 因此仍然有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$.

到此，我们实际上得到$V = \{kf_1 | k \in \mathbb{R}\}$. （18分）

最后直接可知， V按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. （20分）

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $\delta > 0, \alpha \in (0,1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n\Big(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\Big) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \qquad n \geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

证明. 记 $c := \inf\limits_{n\geqslant 1} h_n$.

由题设可知存在 $N \geqslant 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, 成立

$$|x_{n+1}| \leqslant \Big(1 - \frac{c}{n^\alpha}\Big)|x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

.....(+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leqslant \frac{c}{2n^\alpha}.$$

.....(+3 分= 6 分)

取 $C := \max\Big(N^\delta|x_N|, \frac{2}{c}\Big)$. 我们来证明对于 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \frac{C}{n^\delta}$. 首先，由 C 的定义知当 $n = N$ 时, 有 $|x_n| \leqslant \frac{C}{n^\delta}$. 进一步, 若对某个 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \frac{C}{n^\delta}$, 则

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1}| - \frac{C}{(n+1)^\delta} \leqslant \Big(1 - \frac{c}{n^\alpha}\Big)\frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\
= \;& C\Big(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\Big) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}}
\end{aligned}$$

.....(+3 分= 9 分)

$$\leqslant \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leqslant \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leqslant 0.$$

.....(+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当 $n \geqslant N$ 时, 总成立 $|x_n| \leqslant \frac{C}{n^\delta}$. 因此, $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

.....(+3 分= 15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步, 证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 $f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y)$.

(ii) 设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 $E\equiv\Big\{\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0,x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\Big\}$.

解:

(i) 我们有

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2},\qquad f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时, 成立 $f''(x)\geqslant 0$. 所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

.....(+4 分= 4 分)

从而 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 因此对于 $x,y\geqslant 0$, 有

$$f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)=\int_0^y\big(f'(t+x)-f'(t)\big)\,dt\geqslant 0.$$

.....(+2 分= 6 分)

(ii) 由连续性, 易见 E 是一个区间.

.....(+2 分= 8 分)

我们有 $f(x)+f(-x)=1$.

.....(+2 分= 10 分)

下设 $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

若 $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{n}f(x_j)=\dfrac{n}{2}$.

若 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 不全为零, 设其中负数的个数为 k, 非负数的个数为 m, 则 $m+k=n, 1\leqslant k\leqslant n-1$.

不妨设 $x_1,\ldots,x_m\geqslant 0, x_{m+1},\ldots,x_n<0$. 记 $y_1=-x_{m+1},y_2=-x_{m+2},\ldots,y_k=-x_n, x=x_1+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_k$, 则由 (i) 易得

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_k)\leqslant(k-1)f(0)+f(x).$$

注意到 $mf\big(\dfrac{x}{m}\big)-f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单减,

.....(+4 分= 14 分)

我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j) + k - \sum_{j=1}^{k} f(y_j) \\
\geqslant\ & mf\big(\frac{x}{m}\big) + k - \Big((k-1)f(0) + f(x)\Big) \\
>\ & \lim_{u\to+\infty}\Big[mf\big(\frac{u}{m}\big) + k - \big((k-1)f(0) + f(u)\big)\Big] \\
=\ & \frac{k+1}{2} \geqslant 1.
\end{aligned}$$

这表明 $\inf E \geqslant 1$ 而 $1 \notin E$.

另一方面, 取 $u > 0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}$, $x_n = -u$, 则

$$\lim_{u\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \lim_{u\to+\infty}\Big((n-1)f\big(\frac{u}{n-1}\big) + 1 - f\big(u\big)\Big) = 1.$$

因此, $\inf E = 1$.

..... (+4 分= 18 分)

另一方面, 由 $f(-x) = 1 - f(x)$ 可得

$$E = \{n - z | z \in E\}.$$

因此, $\sup E = n - 1$, 且 $n - 1 \notin E$.

所以 E 为开区间 $(1, n-1)$.

..... (+2 分= 20 分)

第十一届全国大学生数学竞赛初赛(数学类B卷)参考答案

一、（本题15分）设L_1 和L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线，点B是它们公垂线段的中点。点A_1 和A_2 分别在L_1 和L_2 上滑动，使得$A_1B\perp A_2B$. 证明直线A_1A_2的轨迹是单叶双曲面。

证明：取公垂线为z轴，B为原点。取x轴使得L_1和L_2与之夹角相同。此时我们有：

$$L_1:\begin{cases} ax+y=0 \\ z=c, \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} ax-y=0 \\ z=-c, \end{cases}$$

其中$c>0$. 由于L_1 与L_2 不垂直，$a\neq\pm1$. ····· 4分

设点A_1的坐标为(x_1,y_1,c)，A_2的坐标$(x_2,y_2,-c)$, 则

$$ax_1+y_1=0,\quad ax_2-y_2=0. \tag{1}$$

由$A_1B\perp A_2B$ 得，

$$x_1x_2+y_1y_2-c^2=0. \tag{2}$$

任取A_1A_2上的点$M(x,y,z)$，有

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z+c}{2c}. \tag{3}$$

····· 10分

消去x_1,x_2,y_1,y_2**：** 令$\frac{z+c}{2c}=k$, 由(1,3) 得

$$x=kx_1-(k-1)x_2;\quad y=-akx_1-a(k-1)x_2.$$

由(1,2)，$x_1x_2=\frac{c^2}{1-a^2}$. 又$k(k-1)=\frac{z^2-c^2}{4c^2}$, 从而

$$a^2(1-a^2)x^2-(1-a^2)y^2+a^2z^2=a^2c^2,$$

所以轨迹是单叶双曲面。 ····· 15分

二、(本题10 分) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$.

解：我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3分

对上式右端的第二个积分做变换$x=\frac{1}{t}$

得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 7分

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

三、（本题15分）设数列$\{x_n\}$ 满足

$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \cdots.$

证明：$\{x_n\}$收敛并求其极限.

证明：由于$x_1 > 0$，所以$x_2 = \ln(1+x_1)$。由数学归纳法，$x_n > 0, n = 1, 2, \cdots.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3分

$$x_{n+1} - x_n = \ln(1 + x_n) - x_n = \frac{1}{1 + \xi_n} x_n - x_n = \left(\frac{1}{1 + \xi_n} - 1\right) x_n$$

$$= -\frac{\xi_n}{1 + \xi_n} x_n < 0,$$

这里$\xi_n \in (0, x_n)$. 所以数列$\{x_n\}$单调减少。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

应用单调有界定理，$\{x_n\}$收敛。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

设$\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$. 由$x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, 知$a = \ln(1 + a)$.

令$f(x) = x - \ln(1 + x)$，$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,\ x \in (0, +\infty), f(0) = 0$. 从而$x = 0$是$f(x)$在$[0, +\infty)$上的唯一零点，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

四、（本题15分）设$\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\}$ 是n 维实线性空间V 的一组基, 令$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$. 证明:
(1) 对$i=1,2,\cdots,n+1$, $\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}\}$ 都构成V 的基;
(2) $\forall\alpha\in V$, 在(1)中的$n+1$ 组基中, 必存在一组基使α 在此基下的坐标分量均非负;
(3) 若$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$, 且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 则在(1)中的$n+1$ 组基中, 满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

证明：(1) 若$i=n+1$，显然有$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是$V$的一组基. 若$1\le i\le n$，令

$$k_1\epsilon_1+k_2\epsilon_2+\cdots+k_{i-1}\epsilon_{i-1}+k_{i+1}\epsilon_{i+1}+\cdots+k_n\epsilon_n+k_{n+1}\epsilon_{n+1}=0.$$

由于$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$，所以有

$$k_{n+1}(\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1})=0$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2分

两式相减得

$$(k_1-k_{n+1})\epsilon_1+\cdots+(k_{i-1}-k_{n+1})\epsilon_{i-1}-k_{n+1}\epsilon_i+(k_{i+1}-k_{n+1})\epsilon_{i+1}+\cdots+(k_n-k_{n+1})\epsilon_n=0.$$

由于$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$线性无关，故得

$$k_1-k_{n+1}=\cdots=k_{i-1}-k_{n+1}=-k_{n+1}=k_{i+1}-k_{n+1}=\cdots=k_n-k_{n+1}=0$$

从而有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_n=k_{n+1}=0$$

因此可得$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$线性无关，于是(1)得证. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) 由于

$$(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_i,\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & -1 & & & \end{pmatrix}$$

为两组基之间的过渡矩阵. ····· 7分

$\forall\alpha\in V$，设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，若$a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0$，则结论正确，否则令$a_i$是负坐标中绝对值最大者，那么

$$\alpha=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})\begin{pmatrix} a_1-a_i \\ \vdots \\ a_{i-1}-a_i \\ a_{i+1}-a_i \\ \vdots \\ a_n-a_i \\ -a_i \end{pmatrix}$$

于是$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$即为所求的一组基. ····· 10分

(3) 设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同. 设a_i是负坐标中绝对值最大者，除了基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$之外，可以证明$\alpha$无论

在哪一组基下的坐标都有负的分量. 事实上，对任意的$k \neq i$ 都有

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \cdots, \epsilon_{n+1}) \begin{pmatrix} a_1 - a_k \\ \vdots \\ a_i - a_k \\ \vdots \\ a_n - a_k \\ -a_k \end{pmatrix}$$

其中$a_i - a_k < 0$，于是知满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

五、（本题20分）设A 是数域F 上的n 阶矩阵, 若$A^2 = I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称A 为对合矩阵.试证：

(1) 若A 是n 阶对合矩阵, 则

$$\mathrm{rank}(I_n + A) + \mathrm{rank}(I_n - A) = n;$$

(2) n 阶对合矩阵A 一定可以对角化, 其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中$r = \mathrm{rank}(I_n + A)$;

(3) 若A, B 均是n 阶对合矩阵, 且$AB = BA$, 则存在可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$ 和$P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

证明：(1) 因为$A^2 = I_n$，故有$I_n - A^2 = 0$ 即$(I_n + A)(I_n - A) = 0$，

于是$\mathrm{rank}(I_n + A) + \mathrm{rank}(I_n - A) \leq n$.

又因为$(I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n$，所以$\mathrm{rank}(I_n + A) + \mathrm{rank}(I_n - A) \geq \mathrm{rank}(2I_n) = n$.

从而得

$$\mathrm{rank}(I_n + A) + \mathrm{rank}(I_n - A) = n.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) 先证A的特征值为1或-1. 设λ为A的任一特征值，则存在非零向量α，使得$A\alpha = \lambda\alpha$，由$A^2 = I_n$可得

$$\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

由$\alpha \neq 0$，可得$\lambda^2 - 1 = 0$，所以有$\lambda = 1$或$\lambda = -1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

下证对合矩阵一定可以对角化. 因为$A^2 = I_n$，故$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$为A的零化多项式，所以A的最小多项式一定为数域F 上互素的一次因式的乘积，从而可知对合矩阵A一定可以对角化.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

又因为对合矩阵A的特征值为1或-1. 由(1)知特征值$\lambda = 1$的几何重数$r = \mathrm{rank}(I_n + A)$，$\lambda = -1$的几何重数为$n - r = \mathrm{rank}(I_n - A)$，所以其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

可对角化另一证明思路：

[对应于特征值$\lambda = 1$，有$n - \mathrm{rank}(I_n - A)$个线性无关的特征向量，对应于特征值$\lambda = -1$，有$n - \mathrm{rank}(-I_n - A)$个线性无关的特征向量，由(1)知，$A$共有$n - \mathrm{rank}(I_n - A) + n - \mathrm{rank}(-I_n - A) = n$个线性无关的特征向量，从而$A$一定可以对角化，其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. ..... 参照上面证明给分]

(3) 由于A为对合矩阵，故存在可逆矩阵G，使得

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

又由$AB = BA$, 则有

$$(G^{-1}AG)(G^{-1}BG) = (G^{-1}BG)(G^{-1}AG).$$

所以$G^{-1}BG = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$为一个准对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

由于$B^2 = I_n$为对合矩阵，故$B_{11}^2 = I_r, B_{22}^2 = I_{n-r}$也是对合矩阵. 由(2)，存在可逆矩阵$G_1, G_2$，使得

$$G^{-1}B_{11}G_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1}B_{22}G_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & -I_{n-r-t} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令$P = G\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$，则有$P$可逆，且有$P^{-1}AP, P^{-1}BP$同时为对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20分

六、（本题15分）设函数$f(x)$ 为闭区间$[a,b]$上的连续凹函数, 满足$f(a)=0, f(b)>0$且$f(x)$在$x=a$处存在非零的右导数. 对$n\geq 2$, 记

$$S_n=\left\{\sum_{k=1}^{n}kx_k:\ \sum_{k=1}^{n}kf(x_k)=f(b),\ x_k\in[a,b]\right\}.$$

(1) 证明对$\forall\alpha\in(0,f(b))$, 存在唯一$x\in(a,b)$ 使得$f(x)=\alpha$;
(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sup S_n-\inf S_n)$.

解：(1) 因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 于是对$\forall\alpha\in(0,f(b))$在(a,b)内至少存在一个点ξ使得$f(\xi)=\alpha$. ····· 1分

下面证明满足上述要求的点是唯一的。假设$\xi,\eta\in(a,b)$, 满足$\xi<\eta$ 及$f(\xi)=f(\eta)=\alpha$. 则点$(\eta,f(\eta))=(\eta,\alpha)$落在端点为$(\xi,f(\xi))=(\xi,\alpha),(b,f(b))$的线段的下方，这与函数的凹性矛盾。 ····· 3分

(2) 我们记

$$T_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ \sum_{k=1}^{n}kf(x_k)=f(b),x_k\in[a,b]\right\},\quad n\geq 2.$$

现对$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in T_n$, 由函数的凹性有

$$\frac{2f(b)}{n(n+1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}kf(x_k)}{1+2+\cdots+n}\leq f\left(\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\right)$$

····· 5分

于是，

$$\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\geq f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}kx_k\geq\frac{n(n+1)}{2}f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

上面不等式当$x_1=x_2=\cdots=x_n=f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\in[a,b]$时等号成立。而$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),\cdots,f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right)\in T_n$,

于是

$$\inf S_n = \frac{n(n+1)}{2} f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

另一方面，连接点$(a, f(a))$与点$(b, f(b))$的直线段落在曲线$y = f(x)$的下方。故有对任意$x \in [a, b]$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a) \leq f(x),$$

即

$$x \leq \frac{b-a}{f(b)} f(x) + a.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} k x_k \leq \frac{b-a}{f(b)} \sum_{k=1}^{n} k f(x_k) + \frac{n(n+1)}{2} a = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

注意，上式的等号当$x_1 = b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = a$时达到。而$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b, a, a, \cdots, a) \in T_n$, 故有

$$\sup S_n = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (\sup S_n - \inf S_n) = b - a + \lim_{n\to\infty} \tfrac{n(n+1)}{2} \left(a - f^{-1}\left(\tfrac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right) \\
&= b - a + f(b) \lim_{n\to\infty} \frac{a - f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)}{\frac{2f(b)}{n(n+1)}} \\
&= b - a + f(b) \lim_{x\to 0+} \tfrac{a - f^{-1}(x)}{x} = b - a + f(b) \lim_{t\to a^+} \tfrac{a-t}{f(t)} \\
&= b - a - \tfrac{f(b)}{f'(a)}
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

七、（本题10分）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛, 其中$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

证明：记$S_0=0$，$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$. 则

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})$$

$$\leq\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_nS_{n-1}}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}$$

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{S_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}\leq\frac{5}{a_1}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{S_n}\qquad(1)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4分

由Cauchy不等式

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\leq\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\leq\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}\right)^{1/2}$$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6分

则由(1)

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\leq\frac{5}{a_1}+2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}-2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma\leq\frac{5}{a_1}+2\sigma,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\leq\sqrt{\sigma}+\sqrt{2\sigma+5/a_1}.$$

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第十届全国大学生数学竞赛试卷

(数学类, 2018年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分)在空间直角坐标系中,设马鞍面S的方程为$x^2-y^2=2z$. 设σ为平面$z=\alpha x+\beta y+\gamma$,其中$\alpha,\beta,\gamma$为给定常数. 求马鞍面$S$上点$P$ 的坐标，使得过P且落在马鞍面S上的直线均平行于平面σ.

解：设所求P点坐标为$P=(a,b,c)$, 满足$a^2-b^2=2c$. 则过P的直线可以表为

$$\ell=\ell(t)=(a,b,c)+t(u,v,w),\ \ u^2+v^2+w^2\neq 0,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

直线$\ell(t)$落在马鞍面S上，得到

$$(u^2-v^2)t^2+2(au-bv-w)t=0, t\in\mathbb{R}.$$

$$au-bv=w,\ \ u^2-v^2=0.$$

于是有

$$v=\varepsilon u,\ \ w=(a-\varepsilon b)u,\ \ \varepsilon=\pm 1.$$

(5分)

于是，过P点恰有两条直线落在马鞍面S上，为

$$\ell_1=\ell_1(t)=(a,b,c)+tu(1,1,a-b),$$

$$\ell_2=\ell_2(t)=(a,b,c)+tu(1,-1,a+b).$$

这两条直线的方向向量$(1,1,a-b)$和$(1,-1,a+b)$均平行于平面σ, 而平面σ的法向量为$(\alpha,\beta,-1)$. 我们得到

$$\alpha+\beta=a-b,\ \ \alpha-\beta=a+b.$$

(10分)

于是

$$a=\alpha,\ b=-\beta,\ c=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2).$$

故所求点P的坐标为

$$P=(\alpha,-\beta,\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)).$$

(15分)

二、(本题 15 分) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为n 阶实方阵，满足

1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

2) 对每个$i(i=1,\ldots,n)$, 有$\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid+\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ji}\mid<4a$.

求$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 的规范形.

解: $f=(x_1,\ldots,x_n)\frac{A+A^T}{2}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. 令$B=(b_{ij})=\frac{A+A^T}{2}$, 则$B$ 为实对称阵，(2分)

且

$$b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn}=a;$$

$$\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}\mid\frac{a_{ij}}{2}+\frac{a_{ji}}{2}\mid<2a$$

结果，$b_{ii}>\sum_{j\neq i}|b_{ij}|$. (5分)

若λ为B的特征值， $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 为关于λ 的非零特征向量，记

$$|x_i|=max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|>0.$$

由于 $B\alpha=\lambda\alpha$,

$$\lambda=\frac{\sum_{j=i}^{n}b_{ij}x_j}{x_i}\geqslant a-\sum_{j\neq i}|b_{ij}|>0.$$

(10分)

故B 为正定矩阵，f 的规范形为$y_1^2+\cdots+y_n^2$.

(15分)

三、（20分）元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设n 阶方阵A, B 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价： $i)$ A 可逆且A^{-1} 仍为整矩阵；$ii)$ A 的行列式的绝对值为1.

2) 若又知A, $A-2B$, $A-4B$, ..., $A-2nB$, $A-2(n+1)B$, ..., $A-2(n+n)B$ 皆可逆，且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵.证明： $A+B$ 可逆.

证明: 1) $i)\Rightarrow ii)$. 由 $AA^{-1}=I$知$|A|\cdot|A^{-1}|=1$. 注意到$|A|,|A^{-1}|$ 皆为整数. 故A 的行列式的绝对值为1.

$ii)\Rightarrow i)$. 由$AA^*=|A|I$ 知 $A^{-1}=A^*/|A|$ 立即知$i)$ 成立. （10分）

2)考虑多项式$p(x)=|A-xB|^2$. 则由已给条件得 $p(0),p(2),p(4),\ldots,p(4n)$ 的值皆为1. 结果多项式$q(x)=p(x)-1$ 有超过 $2n$ 个的零点，从而得出$q(x)\equiv 0$, 即$p(x)\equiv 1$. 特别地， $p(-1)=|A+B|^2=1$. 故$A+B$ 可逆. 证毕. （20分）

四、（本题15分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0$ $(\forall\, n\geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得

$$|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|,\qquad \forall\, x\in[0,1].$$

证明: (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=0$ $(\forall\, n\geqslant 0)$; (2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$.

证明: (1) 由假设, 对任何 $m\geqslant 0$, $f(x)$ 在零点附近有 $m+1$ 阶导数, 从而 $f^{(m)}(x)$ 在 $x=0$ 连续. 因此, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^0}=f(0)=0$. (2分）

对于 $n\geqslant 1$, 利用 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

(5分）

(2) 我们有

$$xf(x)f'(x)\leqslant x\,|f(x)|\,|f'(x)|\leqslant C|f(x)|^2,\qquad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\Big(\frac{f^2(x)}{x^{2C}}\Big)'=\frac{2\Big(xf(x)f'(x)-Cf^2(x)\Big)}{x^{2C+1}}\leqslant 0,\qquad \forall\, x\in(0,1].$$

(10分）

因此 $\dfrac{f^2(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0,1]$ 上单调减少, 从而

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2, \qquad \forall\, 0 < t < x \leqslant 1.$$

所以

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2 = 0, \qquad \forall\, x \in (0,1].$$

因此, $f(x) \equiv 0$. (15分)

五、（本题15分）设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n \geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + b_n, \quad n \geqslant 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n$ $(n \geqslant 2)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n\ln n}\cdot\frac{1}{n+1} + b_n \\ &< 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b_n \\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n.\end{aligned}$$

(5分)

(2) 令 $c_n = (n\ln n)a_n$, $d_n = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\cdot|b_n|$. 则有

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1 + d_n.$$

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln(1+d_n) \leqslant d_n.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} d_k,, \ (n \geqslant 3).$$

(10分)

由于 $0 \leqslant d_n < |b_n|$, 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leqslant \ln c_n,\ n \geqslant 3.$$

即,

$$a_n \geqslant \frac{e^c}{n \ln n},\ n \geqslant 3.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (15分)

(2) 法二：由条件

$$\begin{aligned}\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|.\end{aligned}$$

从 3 到 n 求和, 然后利用积分的性质可知存在常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\ln \frac{a_3}{a_{n+1}} &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k \ln k} + |b_k|\right) \\ &\leqslant C + \ln n + \ln \ln n.\end{aligned}$$

(10分)

于是

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_3 e^C}{n \ln n}.$$

故，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 (15分)

六、（本题20分）设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha + 1}{\alpha} f(x).$$

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 (2) 成立. (2分)

若 $f'(x)<0$, 则 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h} f'(t)\,dt\\
&=f(x)+\int_x^{x+h}\big(f'(t)-f'(x)\big)\,dt+f'(x)h\\
&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^{\alpha}\,dt+f'(x)h\\
&=f(x)+\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h+f(x)>0. \tag{3}$$

将 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 即得

$$\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(11分)

若 $f'(x)>0$, 则记 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt+f(x)\\
&=\int_{x-h}^{x}\big(f'(x)-f'(t)\big)\,dt-f'(x)h+f(x)\\
&\leqslant\int_{x-h}^{x}(x-t)^{\alpha}\,dt-f'(x)h+f(x)\\
&=\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}-f'(x)h+f(x).
\end{aligned}$$

将 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 仍得

$$\big(f'(x)\big)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

总之, 始终有 $\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$. 证毕. (20分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类, 2017年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面Γ的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设P为空间中的平面，它交Γ于一抛物线C. 求该平面P的法线与z-轴的夹角.

解：设平面P上的抛物线C的顶点为$X_0=(x_0,y_0,z_0)$. 取平面P上X_0处相互正交的两单位向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 使得$\beta$是抛物线$C$在平面$P$上的对称轴方向. 则抛物线的参数方程为

$$X(t)=X_0+t\alpha+\lambda t^2\beta,\ \ t\in\mathbf{R},$$

λ为不等于0的常数. (5分)

记$X(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则

$$x(t)=x_0+\alpha_1t+\lambda\beta_1t^2,\ \ y(t)=y_0+\alpha_2t+\lambda\beta_2t^2,\ \ z(t)=z_0+\alpha_3t+\lambda\beta_3t^2.$$

因为$X(t)$落在单叶双曲面Γ上, 代入方程$x^2+y^2-z^2=1$, 我们得到对任意t要满足的方程

$$\lambda^2(\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2)t^4+2\lambda(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)t^3+A_1t^2+A_2t+A_3=0,$$

其中A_1,A_2,A_3是与X_0,α,β相关的常数. 于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=0,\ \ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0.$$

(10分)

因为$\{\alpha,\beta\}$是平面P上正交的两单位向量, 则有

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2=\beta_3^2=\frac{1}{2},\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0,\ \alpha_3=0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2=1;$$

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,0),\ \beta=(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_2,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_1,\beta_3),\ \varepsilon=\pm1.$$

于是得到平面P的法向量

$$n=\alpha\times\beta=(A,B,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}),$$

它与z-轴方向$e=(0,0,1)$的夹角θ满足$\cos\theta=n\cdot e=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$. （15分）

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1}?

证明 充分性：若 $\{a_n\}$ 有界, 则可设 $a_n \leqslant M$.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1}-a_1}{a_1 \ln a_1} \leqslant \frac{M}{a_1 \ln a_1}.$$

由此知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. (5分)

必要性：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. 由于

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right) \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n},$$

所以

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}},$$

其中 $b_n = \ln a_n$. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}$ 收敛. (10分)

由 Cauchy 收敛准则, 存在自然数 m, 使得对一切自然数 p, 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \geqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}} = \frac{b_{m+p+1}-b_m}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界,因为p是任意的. 因而 $\{a_n\}$ 有界. (13分)

题中级数分母的 a_n 不能换成 a_{n+1}. 例如: $a_n = e^{n^2}$ 无界, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1} \ln a_{n+1}}$ 收敛. (15分)

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设$\Gamma=\{W_1,W_2,\ldots,W_r\}$为$r$个各不相同的可逆$n$阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭(即, $\forall M,N\in\Gamma$,有$MN\in\Gamma$), 证明：$\Sigma_{i=1}^r W_i=0$当且仅当$\Sigma_{i=1}^r tr(W_i)=0$,其中$tr(W_i)$表示W_i的迹.

证明：必要性：由迹的性质直接知. (2分)

充分性：首先，对于可逆矩阵$W\in\Gamma$，有$WW_1,\ldots,WW_r$各不相同 . 故有

$$W\Gamma\equiv\{WW_1,WW_2,\ldots,WW_r\}=\{W_1,W_2,\ldots,W_r\},$$

即，$W\Gamma=\Gamma,\forall W\in\Gamma$. (7分）

记$S=\Sigma_{i=1}^r W_i$, 则 $WS=S,\forall W\in\Gamma$. 进而 $S^2=rS$, 即， $S^2-rS=0$. 若λ为S的特征值，则$\lambda^2-r\lambda=0$, 即 $\lambda=0$或r.

结合条件$\Sigma_{i=1}^r tr(W_i)=0$知，S的特征值只能为0. 因此有$S-rI$可逆（例如取S的约当分解就可直接看出）

再次注意到 $S(S-rI)=S^2-rS=0$，此时右乘 $(S-rI)^{-1}$ 即得$S=0$.证毕. (15分)

得分	
评阅人	

四、（本题20分）给定非零实数a及实n阶反对称矩阵A(即, A的转置A^T等于$-A$), 记矩阵有序对集合T为：

$$T=\{(X,Y)|X\in\mathbb{R}^{n\times n},Y\in\mathbb{R}^{n\times n},XY=aI+A\},$$

其中I为n阶单位阵，$\mathbb{R}^{n\times n}$为所有实n阶方阵构成的集合。证明：任取T中两元：(X,Y)和(M,N), 必有$XN+Y^TM^T\neq 0$.

证明：反证. 若 $XN+Y^TM^T=0$,则有

$$N^TX^T+MY=0.$$

(2分)

另外，由$(X,Y)\in T$得

$$XY+(XY)^T=2aI,$$

即

$$XY+Y^TX^T=2aI.$$

类似有

$$MN+N^TM^T=2aI.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

(10分)

进而

$$\frac{1}{2a}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

得

$$YY^T+NN^T=0$$

所以

$$Y=0,N=0$$

导致$XY=0$, 与$XY=aI+A\neq 0$矛盾.证毕. (20分)

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $f(x)=\arctan x$, A 为常数. 若

$$B=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)$$

存在, 求A, B.

解:

法 I. 我们有

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)=\int_0^1 f(x)\,dx\\ &= x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$, $(1\leqslant k\leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k}\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$ 使得

$$f(x)=f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)+\frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-nA+\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx\Big|\\ =\ &\Big|\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big[f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)-f(x)\Big]\,dx\Big|\\ \leqslant\ &M\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2\,dx=\frac{M}{3n},\end{aligned}$$

其中 $M=\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx\\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'\big(\frac{k}{n}\big)=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

.....(15 分)

法 II. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$ 使得

$$f\big(\frac{k}{n}\big) = f(x) + f'(x)\big(\frac{k}{n} - x\big) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(\frac{k}{n} - x\big)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - nA - \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\big(\frac{k}{n} - x\big)\,dx\Big| \\ =\ &\Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big[f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) - f'(x)\big(\frac{k}{n} - x\big)\Big]\,dx\Big| \\ \leqslant\ &M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2\,dx = \frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - An\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\big(\frac{k}{n} - x\big)\,dx \\ =\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} nf'(\eta_{n,k})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - x\big)\,dx \\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_{n,k}) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

其中 $\eta_{n,k} \in \big(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\big)$.

.....(15 分)

法 III. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x \in \big(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\big)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in \big(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\big)$ 使得

$$f(x) = f\big(\frac{k}{n}\big) + f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x - \frac{k}{n}\big) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(x - \frac{k}{n}\big)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned}
& \Big|\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - nA - n\int_{1}^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx + n\int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx\Big| \\
= \ & \Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \Big[f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) + f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(\frac{k}{n} - x\big)\Big]\,dx\Big| \\
\leqslant \ & M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - x\big)^2\,dx = \frac{M}{3n},
\end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - An\Big) = \lim_{n\to\infty} n\int_{1}^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} n\int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx \\
= \ & \frac{f(1)}{2} - \frac{f(0)}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

.....(15 分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、（本题20分）设 $f(x)=1-x^2+x^3 \quad (x\in[0,1])$, 计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}.$$

解: 易见 $f(x)$ 连续. 注意到 $f(x)=1-x^2(1-x)$, 我们有

$$0<f(x)<1=f(0)=f(1), \qquad \forall x\in(0,1).$$

.....(3 分)

任取 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 我们有 $\eta=\eta_\delta\in(0,\delta)$ 使得

$$m_\eta\equiv\min_{x\in[0,\eta]}f(x)>M_\delta\equiv\max_{x\in[\delta,1-\delta]}f(x).$$

.....(6 分)

于是当 $n\geqslant\frac{1}{\delta^2}$ 时,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=\frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_0^\delta\big(1-x(1-x)^2\big)^n\,dx}{\int_0^\delta\big(1-x^2(1-x)\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant \frac{\int_0^\delta\big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^\delta\big(1-x^2\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\eta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant \frac{\int_0^\delta\big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n\,dx}+\frac{(1-2\delta)M_\delta^n}{\eta m_\eta^n}\\
&= \frac{\frac{4}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{\delta}{4}\big)^{n+1}\Big)}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n+1}\Big)}+\frac{(1-\delta)}{\eta}\Big(\frac{M_\delta}{m_\eta^n}\Big)^n.
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0.$$

.....(14 分)

==========

(**注:** 可以用多种写法说明上述极限成立. 原则上, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

可以给 4 分, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{1-\delta}^{1} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

给 4 分.)

==========

对于 $\varepsilon\in(0,\ln\frac{5}{4})$, 取 $\delta=2(e^\varepsilon-1)$, 则 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, $\ln\frac{2+\delta}{2}=\varepsilon$.
另一方面, 由前述结论, 存在 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\leqslant\varepsilon.$$

从而又有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}-\ln 2\right|=\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\frac{\int_0^\delta f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\ln\frac{\delta+2}{2}+\frac{\ln 2\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\varepsilon(1+\ln 2).
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}=\ln 2.$$

.....(20 分)

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类, 2016年10月)

一、(本题 15 分) 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S, 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ.

证明：Γ 落在一张过椭球中心的平面上.

证明 1 在空间中取直角坐标系, 记椭球面 S 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ V=(\alpha,\beta,\gamma).$$

设 $(x,y,z)\in\Gamma$, 则光束中的光线

$$\ell(t)=(x,y,z)+t(\alpha,\beta,\gamma), t\in\mathbb{R}$$

是椭球面 S 的切线. ..... (8分)

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点，故 $t=0$ 是方程

$$\frac{(x+t\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+t\beta)^2}{b^2}+\frac{(z+t\gamma)^2}{c^2}=1$$

的唯一解. 由于 $(x,y,z)\in\Gamma\subset S$, 上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z\right)t=0.$$

这个方程只有 $t=0$ 的唯一解, 当且仅当

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=0.$$

这是一个过原点的平面方程, 故 γ 落在过椭球面中心的一张平面上. .....(15分)

证明 2 在空间中做仿射变换，将椭球面映成圆球面. .....（5分）
这时平行光束映成平行光束，切线映成切线，切点映成切点，椭球中心映成球面中心. .....（10分）
由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆，它落在过球心的平面上，而仿射变换将平面映成平面，故 Γ 落在一张过椭球面中心的平面上. .....（15分）

二、 (本题 15 分) 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1, $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2, 其中 J_A, J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准型. 求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

证明 由秩不等式 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank}(BA) + n$ 得 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n$. 结果 $\operatorname{rank} A \leqslant \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B \leqslant \frac{n}{2}$. .....(5分)

注意到 n 为奇数，故有 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$ 成立。 .....(10分)

若 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(A + J_A) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} J_A < n$, 此时, $0 \in S_1$;

若 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(B + J_B) \leqslant \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} J_B < n$, 此时, $0 \in S_2$. 最终总有 $0 \in S_1 \cup S_2$. .....(15分)

三、(本题 20 分) 设 $A_1, \ldots, A_{2017}$ 为 2016 阶实方阵。证明关于 $x_1, \ldots, x_{2017}$ 的方程 $\det(x_1A_1 + \cdots + x_{2017}A_{2017}) = 0$ 至少有一组非零实数解, 其中 det 表示行列式.

证明 记

$$A_1 = (p_1^{(1)}, \cdots, p_{2016}^{(1)}), \ldots, A_{2017} = (p_1^{(2017)}, \cdots, p_{2016}^{(2017)}).$$

.....(5分)

考虑线性方程组

$$x_1p_1^{(1)} + \cdots + x_{2017}p_1^{(2017)} = 0$$

.....(10分)

由于未知数个数大于方程个数，故该线性方程组必有非零解 $(c_1, \cdots, c_{2017})$. 从而 $c_1A_1 + \cdots + c_{2017}A_{2017}$ 的第一列为 0，更有

$$\det(c_1A_1 + \cdots + c_{2017}A_{2017}) = 0.$$

证毕。 .....(20分)

四、 (本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx$. 设

$$f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\ n=1,2,\cdots.$$

求证: 数列 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx,\ n=0,1,2,\cdots$ 单调递增且收敛.

证明 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx - \int_0^1 \frac{f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ =&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)-f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx = \int_0^1 f_1(x)\,dx - \int_0^1 f_0(x)\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_2-a_1 = &\quad 2\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx - \int_0^1 f_1(x)\,dx\\ &= \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f_1^2(x)+f_0^2(x)}{(f_1(x)+f_0(x))}\,dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ &= \int_0^1 \frac{(f_1(x)-f_0(x))^2}{2(f_1(x)+f_0(x))}\,dx \geqslant 0.\end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1} \geqslant a_n,\ n=1,2,\cdots$. .....(5分)

由于 f_0, f_1 是正连续函数, 可取常数 $k \geqslant 1$ 使得 $f_1 \leqslant kf_0$. 设 $c_1 = k$. 根据递推关系可以归纳证明

$$f_n(x) \leqslant c_n f_{n-1}(x), \tag{1}$$

.....(10分)

其中 $c_{n+1} = \frac{2c_n}{c_n+1},\ n=0,1,\cdots$. 易证 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 1, 且 $\frac{c_n}{c_n+1} \leqslant \frac{k}{k+1}$.

.....(15分)

以下证明 $\{a_n\}$ 收敛. 由 (1) 可得 $a_{n+1} \leqslant c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1} \leqslant \frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n = \frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_na_n \leqslant c_na_n.$$

这说明 $\{c_na_n\}$ 是正单调递减数列, 因而收敛. 注意到 $\{c_n\}$ 收敛到 1, 可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant c_1a_1 = ka_1$. .....(20分)

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geqslant f^{\alpha}(x),\ x \in [0, +\infty). \tag{1}$$

证明 若 $f(x)$ 是这样的函数, 则 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. (1) 式可表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x\right)' \leqslant 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x$ 是单调递减函数. .....(5分)

因而

$$\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x+1) + (x+1) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x,$$

即,

$$(\alpha - 1) \leqslant f^{1-\alpha}(x) - f^{1-\alpha}(x+1) < f^{1-\alpha}(x).$$

因此

$$f^{\alpha-1}(x) < \frac{1}{\alpha-1}.$$

于是 $f(x)$ 是有界函数. .....(10分)

从 $f(x)$ 的严格递增性, 可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geqslant f^{\alpha}(\xi) \geqslant f^{\alpha}(x) \geqslant f^{\alpha}(0) > 0.$$

令 $x \to +\infty$, 上式左端趋于零, 可得矛盾! .....(15分)

六、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \le f(x), g(x) \le 1, \ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

求证：

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \le \frac{1}{2}.$$

证明 由于f 和 g 可用单调阶梯函数逼近，故可不妨设他们都是单调增的阶梯函数。 .....(2分)

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则对 $\forall x, y \in [0,1]$ 有 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$. .....(5分)
事实上，对 $x \geqslant y$ 我们有

$$-1 \leqslant -(g(x) - g(y)) \leqslant h(x) - h(y) = f(x) - f(y) - (g(x) - g(y)) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 1;$$

对 $x < y$ 有

$$-1 \leqslant f(x) - f(y) \leqslant h(x) - h(y) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0,1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 C_1 与 C_2 分别为有限个互不相交区间的并，且由 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$, 有

$$\int_{C_1} h dx = -\int_{C_2} h dx.$$

让 $|C_i|(i = 1, 2)$ 表示 C_i 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1| + |C_2| = 1$. .....(7分)
于是

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 |f - g|dx &= 2\left(\int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx\right) \\
&\leqslant \left(\frac{|C_2|}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{|C_1|}{|C_2|}\int_{C_2}(-h)dx\right) + \int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \\
&= \frac{1}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{1}{|C_2|}\int_{C_2}(-h)dx \\
&\leqslant \sup_{C_1} h + \sup_{C_2}(-h) \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

注意，上式中最后一个不等式来自 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$，另外，若有某个 $|C_i|$ 等于 0，则结论显然成立。 .....(15分)

第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案及评分标准
(数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

一、(本题 15 分) 设 L_1 和L_2是空间中两异面直线.设在标准直角坐标系下直线L_1过坐标为a的点，以单位向量v为直线方向；直线L_2过坐标为b的点，以单位向量w为直线方向.

1) 证明：存在唯一点$P \in L_1$ 和$Q \in L_2$ 使得两点连线PQ 同时垂直于 L_1 和L_2.

2)求P点和Q点坐标(用a, b, v, w表示).

解：1）过直线L_2上一点和线性无关向量 v 和w 做平面σ，则直线L_2落在平面σ上，且直线L_1平行于平面σ 。过L_1做平面τ 垂直于平面σ ，记两平面交线为L_1^*。设两直线L_1^*和L_2的交点为Q, 过Q做平面σ 的法线，交直线L_1为P, 则 PQ 同时垂直于L_1和L_2。 .....(4分)

设$X = P + sv \in L_1$ 和$Y = Q + tw \in L_2$ 也使得XY同时垂直于L_1和L_2，则有

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - sv + tw$垂直于 v 和w ，故有 $-s + (v \cdot w)t = 0$ 和 $-s(v \cdot w) + t = 0$ 。由于$(v \cdot w)^2 < 1$ ，我们得到$s = t = 0$, 即$X = P$，$Y = Q$，这样的P和Q存在且唯一。 .....(8分)

2）设$P = a + sv \in L_1$ 和$Q = b + tw \in L_2$ 。因为$\overrightarrow{PQ} = \lambda v \times w$ ，我们得到

$$(b - a) - sv + tw = \lambda v \times w,$$

.....(11分)

于是有

$$(b - a) \cdot v - s + t(v \cdot w) = 0, (b - a) \cdot w - s(v \cdot w) + t = 0$$

故有

$$s = \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}, t = \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}$$

得到

$$P = a + \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2} v, Q = b + \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2} w.$$

.....(15分)

二、 (本题 20 分) A为4阶复方阵，它满足关于迹的关系式：$\mathrm{tr}A^i = i, i = 1,2,3,4$. 求$A$的行列式.

解 $|A| = \frac{1}{24}$, 过程如下：

首先，记A的4个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, A的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. 则由$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$可知

$$\begin{cases} a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ a_1 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4) \\ a_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

其次，由于迹在相似变换下保持不变，故由A的约当标准形（或Schur分解）立知

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 = 3 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\ \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + \lambda_4^4 = 4 \cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

.....(10分)

由（1）和（2）得

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

由（1）两边立方得

$$1 = \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3+3\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_3^2(\lambda_2+\lambda_1+\lambda_4)+3\lambda_4^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1)-6a_1$$

再由（1）（2）（3）即得

$$1 = 3 + 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1^3 + 3\lambda_2^2 - 3\lambda_2^3 + 3\lambda_3^2 - 3\lambda_3^3 + 3\lambda_4^2 - 3\lambda_4^3 - 6a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}$$

最后，由$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + a_0$得

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ \quad\vdots \\ p(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

相加得

$$4 - 3 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{6} \times 1 + 4a_0 = 0$$

结果$a_0 = \frac{1}{24}$, 亦即A的行列式为$\frac{1}{24}$.□

.....(20分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵，其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

证明 设$C = I + A$, $B = A^2$, A的n个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则$B$的$n$个特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; C的n个特征值为 $\mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \lambda_2 + 1, \ldots, \mu_n = \lambda_n + 1$; C 的特征多项式为 $p_C(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\cdots(\lambda - \mu_n)$.

.....(5分)

若X为$X + AX - XA^2 = 0$ 的解，则有 $CX = XB$; 进而 $C^2X = XB^2, \cdots, C^kX = XB^k \cdots$, 结果 $0 = p_C(C)X = Xp_C(B) = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$. 注意到$B$的$n$个特征值皆为偶数，而$C$的$n$个特征值皆为奇数，故

$B - \mu_1 I, \cdots, B - \mu_n I$ 皆为可逆矩阵，结果由 $0 = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$立得 $X = 0$.□

.....(15分)

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}, a_1>0$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-n)$ 存在.

证明 $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$. 若 $a_n\geqslant n$, 则

$a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=(1-\frac{1}{a_n})(a_n-n)\geqslant 0$, 故

$a_n\geqslant n, \forall n\geqslant 2$, 且$a_n-n$单调递减.

.....(5分)

令 $b_n=n(a_n-n)$, 则

$b_{n+1}=(n+1)(a_{n+1}-n-1)=(n+1)(a_n+\frac{n}{a_n}-n-1)$

$=(a_n-n)(n+1)(1-\frac{1}{a_n})=(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{a_n})b_n$

$=(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n})b_n=(1+R_n)b_n$, 其中 $R_n=\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}$. 从而 $b_n=b_2\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$.

.....(10分)

考察R_n.

$|R_n|\leqslant|\frac{a_n-n}{na_n}|+\frac{1}{na_n}\leqslant\frac{1+|a_2-2|}{n^2}, n\geqslant 2$.

结果由$\lim\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$存在知$\lim\ n(a_n-n)$ 存在.

.....(15分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

五、(本题 15 分)设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}|h(t)|\,dt=a<1$. 构造函数列如下: $g_0(x)=f(x)$,

$$g_n(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g_{n-1}(t)\,dt,\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

证明 记 $M=\sup|f(x)|$. 因而 $|g_0(x)|\leqslant M$. 假设 $|g_{n-1}(x)|\leqslant(1+a+\cdots+a^{n-1})M$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}|g_n(x)|&\leqslant|f(x)|+\int_0^x|h(t)|\,|g_{n-1}(t)|\,dt\\&\leqslant M+\int_0^{+\infty}|h(t)|(1+a+\cdots+a^{n-1})M\,dt\\&=M+a(1+a+\cdots+a^{n-1})M\\&=(1+a+\cdots+a^{n-1}+a^n)M.\end{aligned}$$

因此 $|g_n(x)|\leqslant\frac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由 (1) 可得

$$g_n(x)-g_{n-1}(x)=\int_0^x h(t)(g_{n-1}(t)-g_{n-2}(t))\,dt,$$

由此可得

$$\sup|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant a\,\sup|g_{n-1}(x)-g_{n-2}|.$$

从而

$$\sup|g_n(x)-g_{n-1}(x)|\leqslant a^{n-1}\sup|g_1(x)-g_0(x)|\leqslant a^nM.$$

.....5分

由于 $a\in[0,1)$, 从上面这个式子, 可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(g_n(x)-g_{n-1}(x))$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 即函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续, 因而其极限函数 $g(x)$ 也是连续函数. 10分

在 (1) 的两边取极限得

$$g(x)=f(x)+\int_0^x h(t)g(t)\,dt. \tag{2}$$

记 $\psi(x)=\int_0^x h(t)g(t)\,dt$, $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$, 则此二函数可导, 且 $\psi'(x)=h(x)g(x)$, $H'(x)=h(x)$. 由 (2) 得

$$\psi'(x)-h(x)\psi(x)=h(x)f(x).$$

因而

$$\left(e^{-H(x)}\psi(x)\right)' = e^{-H(x)}h(x)f(x).$$

两边积分可得

$$e^{-H(x)}\psi(x) = \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

即,

$$\psi(x) = e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

将此代入 (2) 就得到

$$g(x) = f(x) + e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

.....15分

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

六、 (本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt$$

为常数。求证：$f(x)$ 必为常数。

证明: 不妨设 $f(x)$ 有下界。设 $m=\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $g(x)=f(x)-m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数，且

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^{x} g(t)\,dt \tag{1}$$

为非负常数。 5分

由 (1) 知 $g(x)$ 是可微函数，且

$$g'(x)+a\big(g(x)-g(x-1)\big)=0. \tag{2}$$

由此

$$\big(e^{ax}g(x)\big)'=ae^{ax}g(x-1)\geqslant 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数。 10分

由 (1), 可得

$$\begin{aligned}A&=g(x)+a\int_{x-1}^{x} e^{at}g(t)e^{-at}\,dt\\&\leqslant g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^{x} e^{-at}\,dt\\&=g(x)+e^{ax}g(x)\big(e^{-a(x-1)}-e^{-ax}\big)\\&=e^{a}g(x).\end{aligned}$$

由此，可得

$$g(x)\geqslant Ae^{-a}.$$

..... 15分

由 $g(x)$ 的定义知，$g(x)$ 的下确界为零，因此 $A=0$. 再根据 (1) 可知 $g(x)$ 恒等于零，即 $f(x)$ 为常数。 20分

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \quad \frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1},$$
$$l_2: \quad \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}.$$

1）证明 l_1 和 l_2 异面；

2）求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程；

3）求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

(1) **证明：** l_1 上有点 $r_1=(4,3,8)$，方向向量为 $v_1=(1,-2,1)$。

l_2 上有点 $r_2=(-1,-1,-1)$，方向向量为 $v_2=(7,-6,1)$。

又

$$(r_1-r_2,v_1,v_2)=\begin{vmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -2 & 1\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

故l_1 和 l_2 异面。 (3分)

(2) l_1上的任一点 $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 l_2上的任一点 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= r_2-r_1+t_2v_2-t_1v_1\\ &= (-5+7t_2-t_1,-4-6t_2+2t_1,-9+t_2-t_1).\end{aligned}$$

公垂线的方向向量为

$$v=v_1\times v_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 7 & -6 & 1\end{vmatrix}=(4,6,8).$$

由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 v 平行：

$$(-5+7t_2-t_1):(-4-6t_2+2t_1):(-9+t_2-t_1)=4:6:8$$

得

$$t_1=-1, t_2=0.$$

故点$r_2+0v_2=(-1,-1,-1)$在公垂线上，从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+1}{8}. \qquad (9分)$$

(3) $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3+t_1+7t_2, 2-2t_1-6t_2, 7+t_1+t_2).$$

因此中点轨迹为一个平面，平面的法向量为

$$v=v_1\times v_2=(4,6,8).$$

又点$\frac{1}{2}(3,2,7)$在平面上，故轨迹的方程为

$$4x+6y+8z-40=0. \qquad (15分)$$

二、(本题 15 分) 设$f\in C[0,1]$ 是非负的严格单调增函数。

1）证明：对任意$n\in\mathbb{N}$，存在唯一的 $x_n\in[0,1]$，使得

$$\big(f(x_n)\big)^n=\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx.$$

2）证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

证明：1）

$$f(0)^n\le\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx\le f(1)^n,$$

由连续函数的介值性质得到 x_n 的存在性。 (3分)

由于 f 是严格单调函数，x_n 是唯一的。 (5分)

2）对任意的小 $\epsilon>0$, 由 f 的非负性和单调性，

$$\big(f(x_n)\big)^n\ge\int_{1-\epsilon}^1\big(f(1-\epsilon)\big)^n=\epsilon\big(f(1-\epsilon)\big)^n,$$

故

$$f(x_n)\ge\sqrt[n]{\epsilon}f(1-\epsilon),$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty}f(x_n)\ge f(1-\epsilon).$$

由 f 的单调性，

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 1-\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, $\lim x_n = 1$. (15分)

三、 (本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间，其中向量加法与纯量乘法均为通常的。 $f_1,\ldots,f_n \in V$. 证明以下两条等价：

1）$f_1,\ldots,f_n$ 线性无关；

2）$\exists a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$ 使得 $det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 det 表行列式.

证明 2) $\Rightarrow$ 1). 考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. 将 $a_1,\ldots,a_n$ 分别代入，得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \cdots + \lambda_n f_n(a_1) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \cdots + \lambda_n f_n(a_n) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此由 $det(f_i(a_j)) \neq 0$ 直接知道 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. (6分)

1) $\Rightarrow$ 2). 用归纳法. 首先， $n=1$时，结论显然。

其次，设$n=k$时结论真。则$n=k+1$时，由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知， $f_1,\ldots,f_k$ 线性无关. 因此$\exists a_1,\ldots,a_k \in [0,1]$ 使得$det(f_i(a_j))_{k\times k} \neq 0$。观察函数

$$F(x) = det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}.$$

按最后一列展开得

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}$均为常量。注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 因此由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知 $F(x)$不恒为0, 从而$\exists a_{k+1} \in [0,1]$使得$F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1,\ldots,a_{k+1} \in [0,1]$, $det(f_i(a_j)) \neq 0$. 证毕。 (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(i) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$;

(ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c.

证明: 由条件知 f 及 f' 是单调递增的正函数，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 都存在。 (2分)

根据微分中值定理，对任意 x 存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta_x)>f'(x)>0.$$

上式左边当 $x\to-\infty$ 时极限为 0，因而有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0.$ (5分)

设 $c=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. 则 $c>b>0$, 且 $\frac{a}{b-c}=-c$. 于是根据条件有

$$f''(x)-cf'(x)\leqslant(b-c)f'(x)+af(x)=(b-c)(f'(x)-cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x)-cf(x))$ 是单调递减的。注意到该函数当 $x\to-\infty$ 时极限为 0，因此有 $f'(x)-cf(x)\leqslant 0$. 即，$f'(x)\leqslant cf(x)$. (10分)

常数 c 是最佳的，这是因为对函数 $f(x)=e^{cx}$ 有 $f''(x)=af(x)+bf'(x)$. (15分)

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明：对任何的正整数 n,l, 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 1）令 $H=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n+X^l=2I+2H+3H^2+\cdots+mH^{m-1}. \qquad (3分)$$

2)考察形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 X, 则有 $X=I+a_1H+a_2H^2+\cdots+a_mH^{m-1}$. 结果，

$$X^n=(I+a_1H+a_2H^2+\cdots+a_mH^{m-1})^n$$

$$=I+(na_1)H+(na_2+f_1(a_1))H^2+\cdots+(na_m+f_{m-1}(a_1,\cdots,a_{m-1}))H^{m-1},$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定，…， $f_{m-1}(a_1,\cdots,a_{m-1})$ 由 $a_1,\cdots,a_{m-1}$ 确定.

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}.$$

(12分)

3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \\ (n+l)a_m + \big(f_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})\big) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解。命题得证。 (20分)

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0,1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

证明： 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减。因此，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0.$$

若 $a > 0$, 则当 n 充分大时，

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0.$$

因为 $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 也发散，但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾！所以应有 $a = 0$. (10分)

令 $b_n = n^k a_n$. 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - n^\alpha \left((1 + \frac{1}{n})^k - 1\right)\right].$$

因为 $(1 + \frac{1}{n})^k - 1 \sim \frac{k}{n}$ $(n \to \infty)$, 所以由上式及条件可得

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \lambda, \ (n \to \infty).$$

因此由开始所证，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 即，$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$. (20分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

密封线 答题时不要超过此线

第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动一周，这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R. 记 $\gamma:\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换，它将 $Q\in\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 满足 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

证明 以 C_1 的圆心 O 为原点建立直角坐标系，使得初始切点 $P=(0,r)$. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动到 Q 点, 记角 $\angle POQ=\theta$, 则 $Q=(r\sin\theta,r\cos\theta)$. 令 ℓ_Q 为 C_1 在 Q 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n}=(\sin\theta,\cos\theta)$. 这时, P 点运动到 P 关于直线 ℓ_Q 的对称点 $P'=P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP}-2(\overrightarrow{QP}\cdot\vec{n})\vec{n}. \qquad (5分)$$

故 P 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta)=P'=(2r(1-\cos\theta)\sin\theta,r+2r(1-\cos\theta)\cos\theta),\ \ 0\le\theta\le 2\pi. \qquad (8分)$$

容易得到, 圆 C 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x},\tilde{y})=(0,r)+\frac{R^2}{x^2+(y-r)^2}(x,y-r). \qquad (11分)$$

将 $(x,y)=P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{R^2\sin\theta}{2r(1-\cos\theta)},\frac{R^2\cos\theta}{2r(1-\cos\theta)}+r\right). \qquad (13分)$$

直接计算，得到抛物线方程

$$\tilde{y}=\frac{r}{R^2}\tilde{x}^2+(r-\frac{R^2}{4r}). \qquad (15分)$$

二、 (本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 和 $b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t),d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

证明 设 $B(t)$ 的第 i 列为 $B_i(t), i=1,2,\cdots,n$. 断言： $t-t_0$ 是 $d(t),d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性，设 $d_1(t_0)\neq 0$，于是

秩$[B(t_0),b(t_0)]=n$, 因为 $d_1(t_0)\neq 0$. (5 分)

注意到秩$B(t_0)\leqslant n-1$, 结果

增广阵$[B(t_0),b(t_0)]$ 的秩 $\neq B(t_0)$ 的秩, (9 分)

从而 $B(t_0)X=b(t_0)$ 不相容. 矛盾. 证毕. (10 分)

六、 (本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i,j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i,j=1,2,\cdots,n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r=0,1,2,\cdots,n$, 并让 ϕ： $\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B),\forall\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 试证明:

(1) $\forall\ A,B\in\Gamma_r$, 秩$\phi(A)=$秩$\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W)\neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明: (1) $A,B\in\Gamma_r$ 表明 A 可表为 $A=PBQ$, 其中 P,Q 可逆. (1 分)

结果 $\phi(A)=\phi(P)\phi(B)\phi(Q)$, 从而 秩$\phi(A)\leqslant$秩$\phi(B)$. (3 分)

对称地有 秩$\phi(B)\leqslant$秩$\phi(A)$. 即有, 秩$\phi(A)=\phi(B)$. (5 分)

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij})|i,j=1,2,\cdots,n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 w_i 使得

$$\phi(E_{ii})w_i=w_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

从而得向量组: $w_1,w_2,\cdots,w_n$. (7 分)

此向量组有如下性质:

a) $\phi(E_{ii})w_k=\begin{cases}\phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ii}E_{kk})w_k=0, & k\neq i \text{ 时}\\ w_i, & k=i \text{ 时}.\end{cases}$

b) $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 线性无关, 从而构成 $\mathbb{R}^n$ 的基, 矩阵 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1+\cdots+x_nw_n=0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. (11 分)

c) 当 $k\neq j$ 时, $\phi(E_{ij})w_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ij}E_{kk})w_k=0$;

当 $k=j$ 时, 令 $\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n$. 两边分别用

$\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{i-1\ i-1}),\phi(E_{i+1\ i+1}),\cdots,\phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$0=\phi(E_{11}E_{ij})w_j=\phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1,\cdots,$$
$$0=\phi(E_{nn}E_{ij})w_j=\phi(E_{nn})(b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n)=b_{nj}w_n,$$

即有

$$b_{1j}=\cdots=b_{i-1\ j}=b_{i+1\ j}=\cdots=b_{nj}=0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j=b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij}\neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1,\cdots,w_n]=0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j\ i,j=1,2,\cdots,n$, 我们得到 n^2 个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs}=E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m=\phi(E_{ms})w_s=\phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s=\phi(E_{mr})b_{rs}w_r=b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs}=b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i=b_{i1}w_i,\ i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k=\begin{cases}0, & k\neq j \text{ 时}\\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j=b_{j1}b_{ij}w_i=b_{i1}w_i=v_i, & k=j \text{ 时}.\end{cases}$$ (21 分)

令 $R=[v_1,\cdots,v_n]$, 则 $R=[w_1,\cdots,w_n]\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1}\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R=\phi(E_{ij})[v_1,\cdots,v_n]=[0,\cdots,0,v_i,0\cdots,0]=[v_1,\cdots,v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由条件 $0<x_2=f(x_1)<x_1$, 归纳地可证得 $0<x_{n+1}<x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0. 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得 $x_0=f(x_0)$. 又因为当 $x>0$ 时, $f(x)>x$, 所以只有 $x_0=0$. 即, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}\qquad(8分)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-\frac{2}{f''(0)}\qquad(15分)\end{aligned}$$

四、 (本题 15 分) 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明 若结论不对, 则存在 $x_0>0$ 使得当 $x\geqslant x_0$ 时, 有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. (5分)

于是当 $x>x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned}f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x&\geqslant f(a\xi)(a-1)x\\&>f(ax)(a-1)x.\end{aligned}$$

但这对于 $x>\frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10分)

五、(本题 20 分) 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:
$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx\geqslant\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\int_{-1}^{1}g(x)\,dx.$$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)g(-x)\,dx. \qquad (2分)$$

因而

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\,dx\\&=2\int_{0}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\,dx. \qquad (1)\end{aligned}$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0.$$

因而

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\,dxdy\geqslant 0. \qquad (15分)$$

由此可得

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1}f(x)h(x)\,dx&\geqslant 2\int_{0}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{0}^{1}h(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1}h(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1}g(x)\,dx. \qquad (20分)\end{aligned}$$

结合 (1) 即得结论.

试题解答

1：（ 15 分） 设 Γ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

解答：设 (x,y,z) 为切锥面上的点（非原点）. 存在唯一 t 使得 $t(x,y,z)$ 落在椭圆抛物面上（ 5 分）. 于是有 $tz=(3x^2+4y^2)t^2+1$, 并且这个关于 t 的二次方程只有一个根（ 10 分）. 于是，判别式

$$\Delta = z^2-4(3x^2+4y^2)=0.$$

这就是所求的切锥面方程（ 15 分）. □

2：（ 15 分）设 Γ 为抛物线， P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明： $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

解答：不妨设抛物线方程为 $y=x^2$, $P=(x_0,y_0)$（ 1 分）. P 与焦点在抛物线的同侧，则 $y_0>x_0^2$（ 2 分）. 设 L 的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$. L 与 Γ 的交点的 x 坐标满足 $x^2=k(x-x_0)+y_0$, 有两个解 $x_1<x_2$ 满足

$$x_1+x_2=k,\ \ x_1x_2=kx_0-y_0$$

（ 6 分）. L 与 x 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成的梯形面积 $D=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)$, 抛物线与 x 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$（ 8 分）. 于是有

$$A(L)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3$$

$$\begin{aligned}36A(L)^2=(x_2-x_1)^6&=((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)^3=(k^2-4kx_0+4y_0)^3\\&=((k-2x_0)^2+4(y_0-x_0^2))^3\geq 64(y_0-x_0^2)^3.\end{aligned}$$

（ 12 分）, 等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值, 当且仅当 $k=2x_0$, 即 $x_1+x_2=2x_0$（ 15 分）. □

3: （ 10 分）设 $f\in C^1[0,+\infty), f(0)>0, f'(x)\geq 0\forall x\in[0,+\infty)$.
已知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx<+\infty$, 求证： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx<+\infty$.

解答：由于 $f'(x)\geq 0$, 有

$$0\leq\int_0^N\frac{1}{f(x)}\,dx-\int_0^N\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx=\int_0^N\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx$$

（ 1 分）. 取极限

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx \le \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(-\frac{1}{f(x)})\,|_0^N \le \frac{1}{f(0)}$$

（ 8 分）. 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

（ 10 分）.

4: （ 10 分）设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵， $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = detP(t)$, 其中 t 为未定元， $detP(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 为 $f(t)$ 的根, 试证明： $Re(\lambda) < 0$, 这里 $Re(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

解答：设 λ 为 $f(t)$ 的根，则有 $detP(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. （ 4 分）
具体地,

$$\alpha^* A\alpha\lambda^2 + \alpha^* B\alpha\lambda + \alpha^* C\alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A\alpha$, $b = \alpha^* B\alpha$, $c = \alpha^* C\alpha$, 则由 A, B, C 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（ 6 分）. 注意到，当 $b^2 - 4ac \ge 0$ 时， $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$Re\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

（ 8 分）. 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $Re\lambda = -b/2a < 0$.
□

5: （ 10 分）已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, |x| < 1$, n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

解答：由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数（ 2 分），而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2-(1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{n-i}(1-x)^{i-4},$$

其 x^{n-1} 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4}-n2^{n-1}(1-x)^{-3}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数（ 6 分），也就等于

$$\frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})'''-\frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})''$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})'-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数，它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n-\frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

（ 10 分）. □

6: （ 15 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微， $f(0)=f(1),\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 且 $f'(x)\neq 1\,\forall x\in[0,1]$. 求证：对任意正整数 n, 有 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|<\frac{1}{2}$.

解答：由于 $f(0)=f(1)$, 故存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$（ 2 分）. 又 $f'(x)\neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x)<1$（ 4 分）. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数（ 6 分）. 故

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\int_0^1 g(x)dx+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})+1))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})>\int_0^1 g(x)dx=-\frac{1}{2}$$

（ 12 分）. 于是有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}\ \square$$

（ 15 分）

7: （ 25 分）已知实矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$. 证明：

(1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $a\neq 2, b=4/3$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $a=3, b=2/3$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $a<2, b=3$.

解答： (1) 矩阵方程 $AX=B$ 有解等价于 B 的列向量可由 A 的列向量线性表示， $BY=A$ 无解等价于 A 的某个列向量不能由 B 的列向量线性表示（ 2 分）. 对 (A,B) 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}2&2&4&b\\2&a&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&2&4&b\\0&a-2&-1&1-b\end{pmatrix}$$

知， B 的列向量组可由 A 的列向量线性表示当且仅当 $a\neq 2$ （ 6 分）. 对矩阵 (B,A) 作初等行变换：

$$(B,A)=\begin{pmatrix}4&b&2&2\\3&1&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&b&2&2\\0&1-3b/4&1/2&a-3/2\end{pmatrix}.$$

由此知 A 的列向量组不能由 B 的列向量线性表示的充要条件是 $b=4/3$. 所以矩阵方程 $AX=B$ 有解但 $BY=A$ 无解的充要条件是 $a\neq 2, b=4/3$ （ 10 分）.
(2) 若 A,B 相似，则有 $trA=trB$, 且 $|A|=|B|$, 故有 $a=3, b=2/3$ （ 12 分）. 反之，若 $a=3, b=2/3$, 则有

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2/3\\3&1\end{pmatrix},$$

A 和 B 的特征多项式均为 $\lambda^2-5\lambda+2$. 由于 $\lambda^2-5\lambda+2=0$ 由两个不同的根，从而 A,B 都可以相似于同一对角阵. 故 A 与 B 相似（ 15 分）.
(3) 由于 A 为对称阵，若 A,B 合同，则 B 也是对称阵，故 $b=3$ （ 16 分）. 矩阵 B 对应的二次型

$$g(x_1,x_2)=4x_1^2+6x_1x_2+x_2^2=(3x_1+x_2)^2-5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1=3x_1+x_2, y_2=x_1$ 下， $g(x_1,x_2)$ 变成标准型： $y_1^2-5y_2^2$ （ 18 分）. 由此， B 的正，负惯性指数为 1 （ 19 分）. 类似地， A 对应的二次型

$$f(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2+ax_2^2=2(x_1+x_2)^2+(a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1=3x_1+x_2, z_2=x_2$ 下 $f(x_1,x_2)$ 变成标准型：$2z_1^2+(a-2)z_2^2$ （ 22 分）. A,B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数，故 A,B 合同的充要条件是 $a<2, b=3$ （ 25 分） □

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

试题参考答案

(数学类, 2011)

一、 (本题 15 分) 已知四点 $A(1,2,7)$, $B(4,3,3)$, $(5,-1,6)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$. 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则

$$\begin{aligned}
& (\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2 \\
= \ & (\bar{x}-4)^2+(\bar{y}-3)^2+(\bar{z}-3)^2 \\
= \ & (\bar{x}-5)^2+(\bar{y}+1)^2+(\bar{z}-6)^2 \\
= \ & (\bar{x}-\sqrt{7})^2+(\bar{y}-\sqrt{7})^2+\bar{z}^2.
\end{aligned}$$

..... (8 分)

即

$$\begin{cases}
3\bar{x}+\bar{y}-4\bar{z}=-10, \\
4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4, \\
(\sqrt{7}-1)\bar{x}+(\sqrt{7}-2)\bar{y}-7\bar{z}=-20.
\end{cases}$$

..... (10 分)

解得 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,-1,3)$. 而 ..... (14 分)

$$(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=25.$$

于是所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$$

..... (15 分)

二、(本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \le \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. ..... (1 分)

下设 $a_k > 0$ ($\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$). 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}\,dx = 1.$$

..... (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \le 1.$$

结论得证. ..... (10 分)

□

三、 (本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma: F^n \to F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F)$, $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

证明: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B, 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha\,(\forall \alpha \in F^n)$. ..... (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$. 故 $AB = BA$, $(\forall A \in M_n(F))$ ..... (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1, c, 1, \cdots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 E_{st} 是 $(s\ t)-$ 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵.则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}$, $(\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$ ..... (15 分)

四、 (本题 10 分) 对于 ΔABC, 求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值.

解答: 三角形三个角 A,B,C 的取值范围为

$$(A,B,C)\in D\equiv\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E=\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0\}$$

上的最大值. ..... (1 分)

我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)\\
=&\max_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq 0}}(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\ \max_{0\leq A\leq\pi-C}\Big((3+4\cos C)\sin A++4\sin C\cos A+18\sin C\Big)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\Big(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\Big)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C).
\end{aligned}$$

..... (4 分)

考虑

$$f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C,\qquad 0\leq C\leq\pi.$$

易见

$$f(C)\geq f(\pi-C),\qquad \forall C\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

..... (5 分)

直接计算得

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

..... (6 分)

计算得 $f'(C)=0$ 等价于

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0.$$

从而它在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$. ..... (7 分)

于是

$$\begin{aligned}\max_{0\le C\le\pi} f(C)=\max_{0\le C\le\frac{\pi}{2}} f(C)&=\max\left\{f(\arccos\frac{1}{8}),f(0),f(\frac{\pi}{2})\right\}\\ =\ \max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4},7,23\right\}&=\frac{35\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

..... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上 (A,B,C 之一为零) 的最大值为 22. ..... (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$. ..... (10 分)

五、 (本题 15 分) 对于任何实数 α, 求证存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式, $\forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 存在 $\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

..... (1 分)

从而

$$\Big|\sqrt{1+x}-\big(1+\frac{x}{2}\big)\Big|\leq x^2,\qquad \forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

..... (2 分)

于是当 $n\geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\Big|\\ =\ &\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{a_k}{2n})\Big|\\ \leq\ &\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{n}\Big)^2\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

..... (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

..... (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1 = 1$, 依次定义

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{如果} \sum_{k=1}^{n} a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \text{如果} \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 2\alpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

..... (10 分)

记

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

我们有

$$-\sqrt{n} \leq y_n \leq \sqrt{n}.$$

若 $y_n > 2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0;$$

..... (12 分)

而当 $y_n < 2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0 < y_{n+1} - y_n < \frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1} - 2\alpha$ 和 $y_n - 2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_n - 2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le |y_{n+1}-y_n| \le \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le \max(|y_n-2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

..... (14 分)

注意到对任何 $N>0$, 总有 $m \ge N$, 使得 $y_{m+1}-2\alpha$ 和 $y_m-2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k-2\alpha| \le \frac{2}{\sqrt{m+1}} \le \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \qquad \forall\, k=m+1, m+2, \ldots.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\alpha$. ..... (15 分)

□

六、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

证明: 设 V 是 F上 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A. 下面证明存在 $\sigma-$不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构, $\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\operatorname{Ker}\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 m 使得 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{m+i}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 进而有 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$.
(7 分)

下面证明 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$.

$\forall \alpha \in \operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m$, 由 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in Ker\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m = (0)$, 从而 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$. (12 分)

由 $\sigma(\operatorname{Ker}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^m$, $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\operatorname{Ker}\sigma^m, \operatorname{Im}\sigma^m$ 是 $\sigma-$不变子空间. 又由 $\sigma^m(\operatorname{Ker}\sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Ker}\sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) = \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. ..... (17 分)

从 $V_1 = \operatorname{Im}\sigma^m, V_2 = \operatorname{Ker}\sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$; $\beta_1, \cdots, \beta_t$, 合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. ..... (20 分)

==========

注: 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:
存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块，$\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. ..... (5 分)

令

$$B = \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \operatorname{diag}(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. ..... (10 分)

七、 (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt=0$.

证明: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt=0$.

证明: 首先, 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt$ 收敛. 下记

$$f(x)=\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt, \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned}
&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt)\sin t\,dt\\
=\ &\int_0^{\pi}\Big(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
\geq\ & 0, \qquad \forall\, k=0,1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty} nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{2\pi} nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \int_0^{\pi} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\\
&= n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

. . . . . (5 分)

结合 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]=0.$$

. . . . . (7 分)

这样, 任取 $\delta>0$, 有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 有

$$n\Big|F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big|\le\delta.$$

从而对任何 $m>0$, $n>N$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m} n\Big|F\Big(\frac{3^k n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\Big)\Big|+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \frac{3\delta}{2}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big).
\end{aligned}$$

上式中令 $m\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 得到

$$0\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\le\frac{3\delta}{2},\qquad \forall\, n>N.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=0.$$

. . . . . (9 分)

进一步利用单调性, 当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0\le xF(x)\le\pi\big[\frac{2x}{\pi}\big]F\Big(\big[\frac{2x}{\pi}\big]\cdot\frac{\pi}{2}\Big),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x\to+\infty} x\,F(x)=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall\, \varepsilon \in (0,\pi)$, 当 $x > 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1} t \, H(x^{-1}t) \, \frac{\sin t}{t} \, dt \end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon \, H(x^{-1}\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt + M\varepsilon, \qquad \forall\, x > 0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (14 分)

于是

$$0 \leq \varlimsup_{x \to 0^+} f(x) \leq M\varepsilon.$$

由 $\varepsilon \in (0,\pi)$ 的任意性, 可得 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

进而因 f 是奇函数推得 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

□

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类)

一、(10分) 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. 证明: $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

证明: 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \le 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

.....(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \le \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

.....(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \qquad \forall\, n = 0,1,2,\ldots.$$

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

.....(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

.....(8 分)

进一步, 设 η 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \le \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0,1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

.....(10 分)

□

二、(15 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明: 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$.

.....(2 分)

我们注意到 B 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

.....(4 分)

设 λ 为 A 的一个特征值, 则 λ^2 为 B 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 A 的特征值均为 0.

.....(6 分)

于是 A 的 Jordan 标准型只可能为$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

.....(10 分)

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

.....(12 分)

因此 A^2 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

.....(15 分)

□

三、**(10 分)** 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

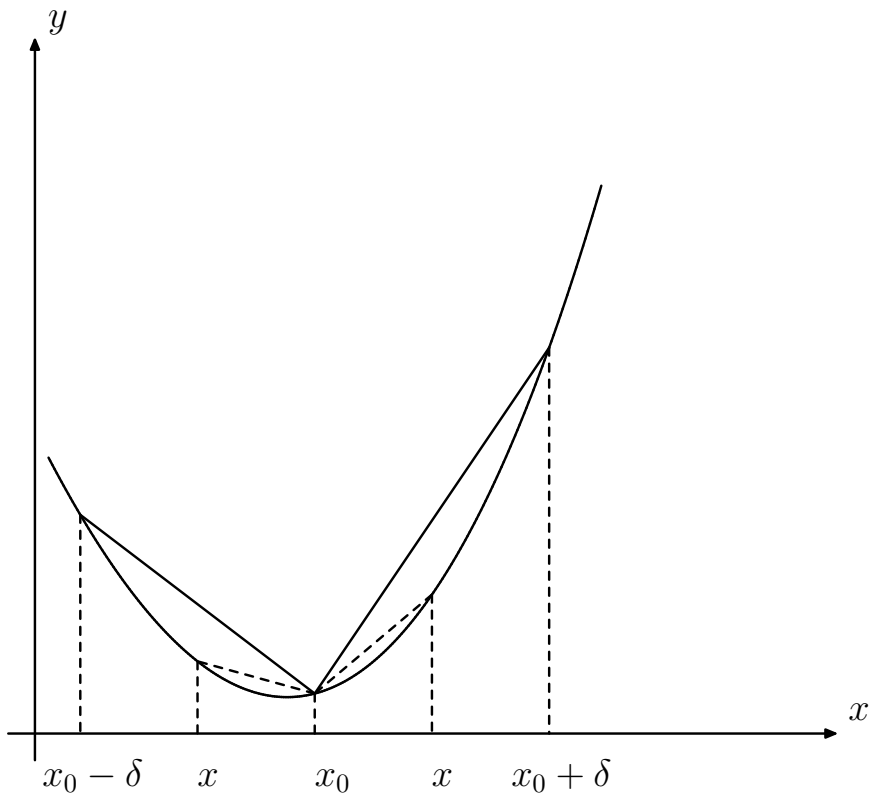
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha) f(x_2, y_2).$$

证明: 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{d} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta}.$$

.....(2 分)



从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le \left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right| + \left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|, \qquad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

.....(4 分)

(ii) 设 $(x_0, y_0) \in D$. 则有 $\delta > 0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\delta, y_0+\delta] \subset D.$$

.....(5 分)

注意到固定 x 或 y 时, $f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x,y_0), f(x,y_0+\delta), f(x,y_0-\delta)$ 都是 $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta} \\ & + \frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta} \\ \le\ & M_\delta, \qquad\qquad \forall\, x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]. \end{aligned}$$

.....(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x,y)\in E_\delta$,

$$
\begin{aligned}
& |f(x,y)-f(x_0,y_0)| \\
\le\ & |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \\
\le\ & \Big(\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\Big)|y-y_0| \\
& +\Big(\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\Big)|x-x_0| \\
\le\ & M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|.
\end{aligned}
$$

于是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 证毕.

.....(10 分)

□

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx=-a.$$

证明: 记 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<+\infty$. 令 $r(x)=f(x)-f(1)-f'(1)(x-1)=f(x)-a(x-1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, 使得当 $\delta<x\le 1$ 时,

$$|r(x)|\le\varepsilon(1-x).$$

.....(2 分)

我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= \int_0^\delta x^n f(x)\,dx+\int_\delta^1 ax^n(x-1)\,dx+\int_\delta^1 x^n r(x)\,dx \\
&= R_1+R_2+R_3.
\end{aligned}
$$

.....(4 分)

注意到

$$|R_1|\le M\int_0^\delta x^n\,dx=M\frac{\delta^{n+1}}{n+1},$$

$$R_2=-\frac{a}{(n+1)(n+2)}+a\Big(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\Big)$$

以及

$$\begin{aligned}|R_3| &\leq \int_\delta^1 x^n\,|r(x)|\,dx \leq \varepsilon\int_\delta^1 x^n(1-x)\,dx\\ &\leq \varepsilon\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_1| = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_2 + a| = 0$$

以及

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,|n^2R_3| \leq \varepsilon.$$

.....(8 分)

所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx + a\right| \leq \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx = -a.$$

证毕.

.....(10 分)

□

五、(15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化)过以下九点：$A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$, $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面？

解答: 易见，A、B、C 共线，D、E、F 共线.

.....(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

.....(10 分)

然后，可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的，且不是同一条直线.

.....(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面，不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

.....(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1.$$

六、(20 分) 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha\equiv(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha A\alpha^\top\geq 0$ (这里 $\alpha^\top$ 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β, 使得 $\beta A\beta^\top=0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y, 当 $xAy^\top\neq 0$ 时有 $xAy^\top+yAx^\top\neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v, 都有 $vA\beta^\top=0$.

证明: 取任意实数 r, 由题设知

$$(v+r\beta)A(v+r\beta)^\top\geq 0.$$

.....(8 分)

即

$$vAv^\top+rvA\beta^\top+r\beta Av^\top+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

.....(12 分)

亦即

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

.....(14 分)

若 $vA\beta^\top\neq 0$, 则有 $vA\beta^\top+\beta Av^\top\neq 0$. 因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top<0.$$

盾. 证毕.

.....(20 分)

□

七、(10 分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上Riemann 可积, $0\leq f\leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 $0,1$ 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$,

$$\Big|\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

证明: 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \Big[\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t)\,dt\Big)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

.....(5 分)

对于 $0 \le \alpha < \beta \le 1$, 设非负整数 $k \le \ell$ 满足 $\dfrac{k}{n} \le \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, $\dfrac{\ell}{n} \le \beta < \dfrac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \Big|\int_\alpha^\beta \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\Big| \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)|\,dx + \Big|\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx\Big| + \int_{\frac{\ell}{n}}^\beta |f(x) - g(x)|\,dx \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} 1\,dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^\beta 1\,dx \\ \le\ & \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□

八、(10 分) 已知 $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2\,dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2\,dt \ge \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$$

证明: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

.....(2 分)

则

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \geq \int_0^{q}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{q}\Big(\int_0^{q}\varphi^{-1}(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{q}(a-Q)^2 = \frac{1}{q}(I+P)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt \geq \int_0^{p}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{p}\Big(\int_0^{p}\varphi(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{p}(a-P)^2 = \frac{1}{p}(I+Q)^2.
\end{aligned}$$

.....(6 分)

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt + \int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{p}(I+Q)^2 + \frac{1}{q}(I+P)^2 \\
\geq\ & \frac{2}{\sqrt{pq}}(I+P)(I+Q) = \frac{2}{\sqrt{a}}\Big(QP+aI\Big).
\end{aligned}$$

.....(8 分)

易见可取到适当的 p,q 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$, 从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt + \int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{a}\Big(\frac{(a-I)^2}{4}I + aI\Big) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(a+I)^2}{4} \geq \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□

专业：_____ 年级：_____ 所在院校：_____ 身份证号：_____ 姓名：_____

密 封 线

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满　分	15	20	15	10	10	15	15	100
得　分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

得　分	
评阅人	

一、（15 分）求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

解：先求圆柱面的轴 L_0 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n}=(1,1,1)$，且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$，过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n}=(1,1,1)$ 的平面 π 的方程为：$x+y+z=0$. ……（3 分）

π 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ ……（5 分）

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹，即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases},$$ ……（9 分）

将 L_0 的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x=y=z$ 和 $x-1=y+1=z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为L_0上的点. ……. （12 分)

对圆柱面上任意一点$S(x,y,z)$， 有$\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0. \quad \text{…….（15 分)}$$

得　分	
评阅人	

二、（20 分）设$C^{n\times n}$是$n\times n$复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域C上的线性空间，$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

（1）假设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若$AF=FA$，证明：

$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$；

（2）求$C^{n\times n}$的子空间$C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$的维数.

（1）的证明:记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$.要证明$M=A$，只需证明A与M的各个列向量对应相等即可.若以e_i记第i个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$. …… （2 分)

若记$\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$，则$F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$.注意到，

$$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n \qquad (*) \quad \text{…..（6 分)}$$

由

$$\begin{aligned} Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1 \\ &=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1 \\ &=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1 \\ &=\alpha_1=Ae_1 \text{.....(10分)} \end{aligned}$$

知$Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

……

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以，$M = A$. …….. （14 分)

（2）解： 由（1），$C(F) = span\{E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}\}$，…… （16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1} = O$，等式两边同右乘 e_1，利用（*）得

$$\theta = Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$
$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n \text{.....(18分）}$$

因 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ ……（19 分)

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 线性无关.因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基，特别地，$\dim C(F) = n$. ……（20 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间（$n > 0$），f, g 是 V 上的线性变换.如果 $fg - gf = f$，证明：f 的特征值都是 0，且 f, g 有公共特征向量.

证明： 假设 λ_0 是 f 的特征值，W 是相应的特征子空间，即 $W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}$.于是，$W$ 在 f 下是不变的. ……（1 分)

下面先证明，λ_0 =0.任取非零 $\eta \in W$，记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数，于是，当 $0 \le i \le m-1$ 时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$ 线性无关…..（2 分)

$0 \le i \le m-1$ 时令 $W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$,其中，$W_0 = \{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1 \le i \le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$ 在 g 下是不变的. ……（4 分)

下面证明，W_m 在 f 下也是不变的.事实上，由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta \text{ ……（5 分)}$$

$$
\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta \qquad \text{.....(6分)}
\end{aligned}
$$

根据

$$
\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}
$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$ 的线性组合，且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0. ……（8分)

因此，W_m 在 f 下也是不变的，f 在 W_m 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 λ_0，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$. …..（10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立，而 $fg - gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0 = 0$，即 λ_0 =0. ……..（12 分)

任取 $\eta \in W$，由于 $f(\eta) = \theta$，$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$，所以，$g(\eta) \in W$.因此，W 在 g 下是不变的.从而，在 W 中存在 g 的特征向量，这也是 f, g 的公共特征向量. …….（15 分)

得　分	
评阅人	

四、（10 分）设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \le M$.（1）证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；（2）设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导,为什么？

证明：（1）$\forall \varepsilon > 0$，将区间 $[a,b]$ K 等分，分点为 $x_j = a + \dfrac{j(b-a)}{K}$，$j = 0,1,2,\cdots,K$，使得 $\dfrac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$ 上收敛，因此 $\exists N$，$\forall m > n > N$，使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0,1,2,\cdots,K$ 成立. ……..（3 分)

于是 $\forall x \in [a,b]$，设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$，则

$$
|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,
$$

$$=\left|f_m'(\xi)(x-x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n'(\eta)(x-x_j)\right|<(2M+1)\varepsilon.$$ …（5 分）

（2）不一定. ……（6 分）

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导.（10 分）

得　分	
评阅人	

五、（10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

解： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$ …….（3 分）

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}tdt=\frac{\pi^2n}{2},$$ ……（5 分）

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\left(\frac{1}{t}\right)$$ ……..（7 分）

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2n}{8}.$$ ……..（8 分）

因此 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{\pi^2n}$，由此得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散. ……（10 分）

得　分	
评阅人	

六、（15 分） $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解： 采用极坐标 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$ …..（6 分）

$$=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$ …….（10 分）

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}.$$ …….（15 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分））假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$. ……. （4 分)

由于 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$ ……..……..…….. （7 分)

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$. ……...……..……..（8 分)

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$. ……..……..（11 分)

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知 在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$. ……..……..…….（15 分)